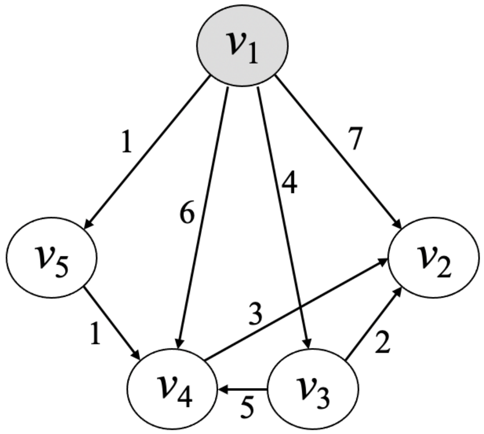
2절 단일출발점 최단경로: 다익스트라 알고리즘

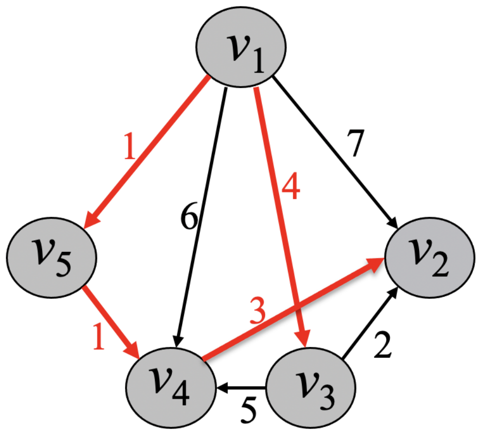
- 문제: 가중치 포함 방향그래프의 한 특정 마디에서 임의의 다른 마디로 가는 최단경로 구하기
- 주의사항: 임의의 출발점이 아닌 하나의 고정된 하나의 마디에서 출발하는 경로만 대상으로 함.
- 최소비용 신장트리 문제와 비슷한 알고리즘으로 해결 가능

예제

- v_1 에서 임의의 다른 마디로 가는 최단 경로 구하기



- 해답



탐욕 알고리즘 적용

전제조건

- 가중치를 포함하고 연결된 방향그래프 G가 아래와 같이 주어졌음:

$$G = (V, E)$$

- V: 마디들의 집합

- E: 이음선들의 집합(방향 있음)

다익스크라(Dijkstra) 알고리즘 기본 아디이어

$G = (V, E)$

$Y = \{v_1\}$
$F = \emptyset$

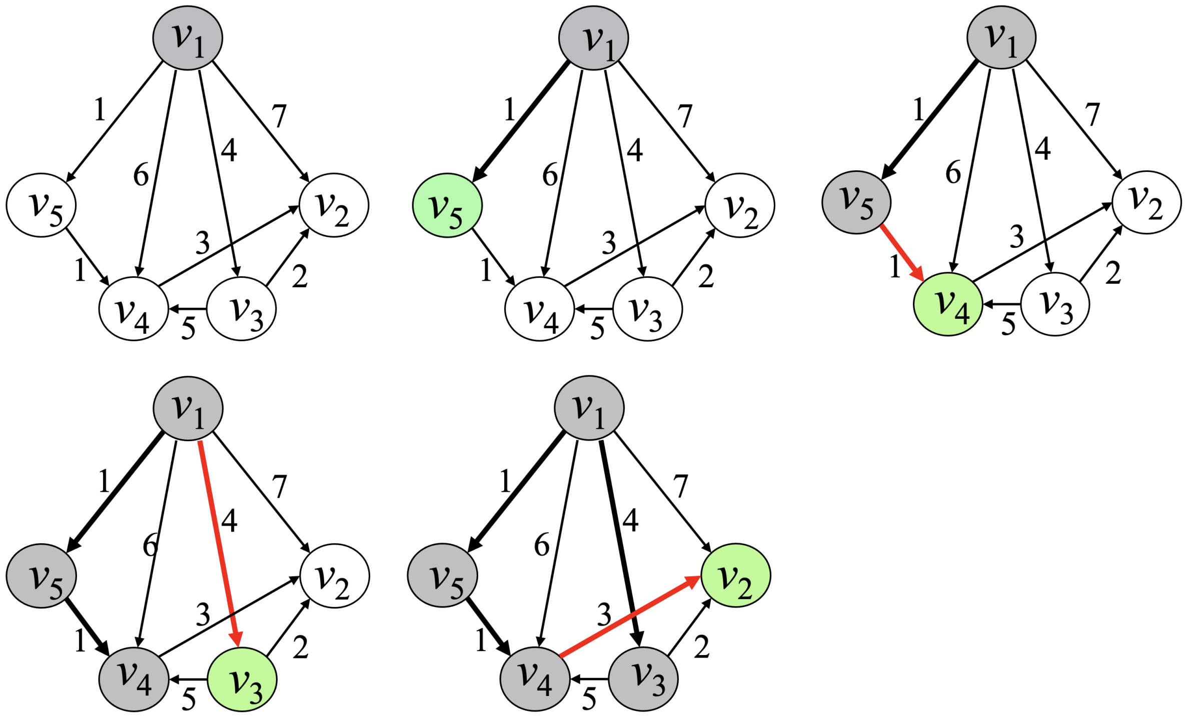
while (사례 미해결):

- v_1 에서 출발하여 Y에 속한 마디만 중간경로로 사용해서 갈 수 있는 마디 중에서 v_1 으로부터 가장 짧은 경로를 갖는 마디 $v \in (V - Y)$ 선택.

- 선택된 마디를 Y에 추가.
- 해당 마디 선택에 사용된 이음선을 F에 추가.

if ($Y == V$):
    사례해결

예제



다익스트라 알고리즘의 최적여부 증명

- 프림 알고리즘에 대한 증명과 유사 (연습문제)
  - 두 집합 Y와 F가 변경될 때마나 v_1 으로부터 각 마디까지의 최단거리가 변경되지 않음을 재귀적으로 증명해야 함.

다익스트라 알고리즘 구현

In [1]:

```python
from math import inf
from collections import defaultdict
```

In [2]:

```python
def dijkstra(W):
    V = len(W)
    F = defaultdict(list) # 최단경로를 구성하는 이음선들의 집합

    touch = [0] * V
    length = [W[0][i] for i in range(V)]
    length[0] = -1

    for _ in range(V-1):
        min = inf
        for i in range(V):
            if (0 < length[i] < min):
                min = length[i]
                vnear = i

        F[touch[vnear]].append(vnear)

        for i in range(V):
            if (length[vnear] + W[vnear][i] < length[i]):
                length[i] = length[vnear] + W[vnear][i]
                touch[i] = vnear

        length[vnear] = -1

    return F
```

In [3]:

```
W = [[0,     7,   4,   6,   1],
     [inf,   0, inf, inf, inf],
     [inf,   2,   0,   5, inf],
     [inf,   3, inf,   0, inf],
     [inf, inf, inf,   1,   0]]
```

In [4]:

```
dijkstra(W)
```

Out[4]:

```
defaultdict(list, {0: [4, 2], 4: [3], 3: [1]})
```

코드 설명

- 신장트리 구현 코드와 거의 동일
- 차이점: `length[vnear] = -1` 명령문을 전체 반복문 맨 뒤로 옮겨야 함.
    - 신장트리 코드에서는 위치가 전혀 중요하지 않았음.

다익스트라 알고리즘 일정 시간복잡도 분석

- 입력크기: 마디 수 n
- 단위연산: 중첩 for 반복문
- 일정 시간복잡도: $n-1$ 번 반복되는 명령문 두 개가 $n-1$번 반복되는 반복문 안에 들어 있음. 따라서 다음이 성립:

$$T(n) = 2(n-1)(n-1) = \Theta(n^2)$$

다익스트라 알고리즘 일반화

- 출발점을 v_1 으로 고정하는 대신에 임의의 마디로 지정하기
- `dijstra()` 함수에 출발점을 추가하면 됨.

In [5]:

```python
def dijkstra_gen(k, W):
    V = len(W)
    assert (0<= k < V)
    F = defaultdict(list) # 최단경로를 구성하는 이음선들의 집합

    touch = [k] * V
    length = [W[k][i] for i in range(V)]
    length[k] = -1 # v_k를 출발 마디로 지정

    for _ in range(V-1):
        min = inf
        for i in range(V):
            if (0 < length[i] < min):
                min = length[i]
                vnear = i

        if min == inf:
            return "일부 경로가 없어요."

        F[touch[vnear]].append(vnear)

        for i in range(V):
            if (length[vnear] + W[vnear][i] < length[i]):
                length[i] = length[vnear] + W[vnear][i]
                touch[i] = vnear

        length[vnear] = -1

    return F
```

In [6]:
```
dijkstra_gen(0, W)
```
Out[6]:
```
defaultdict(list, {0: [4, 2], 4: [3], 3: [1]})
```
In [7]:
```
dijkstra_gen(2, W)
```
Out[7]:
```
'일부 경로가 없어요.'
```
In [8]:
```
dijkstra_gen(4, W)
```
Out[8]:
```
'일부 경로가 없어요.'
```

5절 탐욕 알고리즘과 동적계획법 알고리즘 비교: 0-1 배낭채우기 문제

- 최단경로를 계산하는 문제를 두 가지 방식으로 풀었음. 하지만 방식에 따라 복잡도가 다름.
    - 동적계획법(3장 2절): $\Theta(n^3)$
    - 탐욕 알고리즘(2절): $\Theta(n^2)$
- 일반적으로 탐욕 알고리즘이 더 간단하고 더 효율적임.
- 하지만 탐욕 알고리즘이 항상 최적의 해를 제공하는 것은 아니며, 그런 경우에도 증명이 매우 어려울 수 있음.

0-1 배낭채우기 문제

- n개의 주어진 물건들 중에서, 한정된 용량(W)의 배낭에 물건을 골라 넣었을때 얻을 수 있는 최대 값어치를 찾는 조합 최적화 문제

무차별 대입 방식(brute force approach)

- 배낭에 넣을 수 있는 모든 물건의 조합 살피기
- n개의 물건이 있을 때 총 2^n 개의 조합 존재
- 따라서 $\Theta(2^n)$의 시간복잡도를 가짐. 따라서 실용성 없음.

탐욕 알고리즘 예제

```
물건1: 50만원, 5kg
물건2: 60만원, 10kg
물건3: 140만원, 20kg
```

- W = 30일 경우 최적의 해

  ```
  140 + 60 = 200(만원)
  ```

- 탐욕 알고리즘은 선택 전략과 경우에 따라 최적의 해 제공여부가 달라짐.

전략 1

- 가장 값비싼 물건 선택하기

- 위 예제에서는 최적의 해를 제공하지만, 경우에 따라 달라짐.
    - 반례: 물건4가 아래와 같이 추가되는 경우 가장 값비싼 문건을 먼저 선택하는 전략은 최적의 해를 제공하지 않음. (이유는?)

```
물건1: 50만원, 5kg
물건2: 60만원, 10kg
물건3: 140만원, 20kg
물건4: 30만원, 2kg
```

전략 2

- 무게당 값어치가 가장 큰 물건 선택

```
물건1 1kg당 값어치: 10만원
물건2 1kg당 값어치: 6만원
물건3 1kg당 값어치: 7만원
```

따라서 아래 물건 선택

```
50만원: 5kg
140만원: 20kg
------------
190만원: 25kg
```

최적의 해 아님.

- 하지만 물건4가 추가되면 최적의 해를 제공함.

```
물건1 1kg당 값어치: 10만원
물건2 1kg당 값어치: 6만원
물건3 1kg당 값어치: 7만원
물건4 1kg당 값어치: 15만원
```

따라서 아래 물건 선택

```
30만원: 2kg
50만원: 5kg
140만원: 20kg
------------
220만원: 27kg
```

최적의 해 아님.

결론

- 탐욕 알고리즘은 0-1 배낭채우기 문제를 일반적으로 해결할 수 없음.

동적계획법 알고리즘

- 참조: [고전 컴퓨터 알고리즘 인 파이썬, 9장 (https://github.com/coding-alzi/ClassicComputerScienceProblemsInPython)](https://github.com/coding-alzi/ClassicComputerScienceProblemsInPython)

- 이항계수 동적계획법 알고리즘과 유사.

- 아래 조건을 만족하는 `(n+1,W+1)` 모양의 2차원 행렬 P 생성

$$
\begin{aligned}
P[i][w] = \ & \text{총 무게가 } w\text{를 넘기지 않는 조건하에서} \\
& \text{처음 } i \text{ 개의 물건만을 이용해서 얻을 수 있는 최대 이익}
\end{aligned}
$$

주어진 조건

- i 번째 물건의 무게와 값어치 ($0 \le i \le n$)
    - 무게: w_i
    - 값어치: p_i

$P[i][j]$의 재귀식

- 초기값: $i = 0$인 경우
    - 물건을 전혀 사용하지 못하기 때문에 물건을 전혀 배낭에 담지 못함.
    - 따라서 모든 $0 \leq w \leq W$에 대해 다음 성립:

$$P[0][w] = 0$$

- 귀납단계: $i > 0$ 이라고 가정.
  - 3 가지 경우 존재

- 경우 1
    - $w_i > w$
    - 즉, i번째 물건을 가방에 전혀 넣을 수 없음.
    - 따라서 아래 재귀식 성립

$$P[i][w] = P[i-1][w]$$

- 경우 2
  - $w_i \leq w$ 이지만 i번째 물건이 최적 조합에 사용되지 않는 경우

$$P[i][w] = P[i-1][w]$$

- 경우 3
  - $w_i \le w$ 이고 i번째 물건이 최적 조합에 사용되는 경우

$$P[i][w] = p_i + P[i-1][w-w_i]$$

- 정리하면:

$$
P[i][w] = \begin{cases} \max(P[i-1][w],\, p_i + P[i-1][w-w_i]) & \text{if } w_i \le w, \\ \\ P[i-1][w] & \text{if } w_i > w \end{cases}
$$

- 최적화 원칙도 성립함.

동적계획법 알고리즘 구현

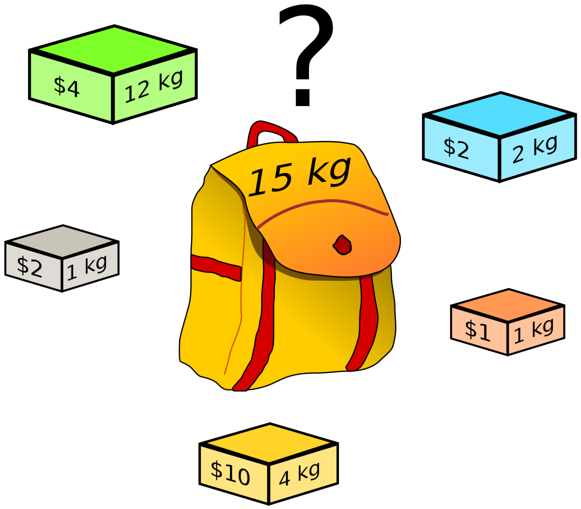
- 물건들의 클래스 지정
    - NamedTuple 클래스를 활용하면 쉽게 자료형 클래스를 지정할 수 있음.

In [9]:

```python
from typing import NamedTuple

class Item(NamedTuple):
    name: str
    weight: int
    value: float
```

예제



<그림 출처:[배낭 문제: 위키피디아 (https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem)](https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem)>

In [10]:

```
items = [Item("item1", 1, 1),
         Item("item2", 1, 2),
         Item("item3", 2, 2),
         Item("item4", 4, 10),
         Item("item5", 12, 4)]
```

- 각 물건 조합의 최상의 결과를 알려주는 표 작성 알고리즘

In [11]:
```
# 아이템(물건) 개수와 용량 한도
n = len(items)
W = 15
```

- 행렬 P를 영행렬로 초기화 하기

In [12]:

```python
# (n+1,W+1) 모양
P = [[0.0 for _ in range(W+1)] for _ in range(n+1)]
```

- P 행렬의 항목을 1번행부터 행단위로 업데이트함.
    - 0번행과 0번열은 그대로 0으로 둠.

In [13]:

```
for i, item in enumerate(items):          # 행 인덱스(물건 번호)는 0부터 시작함에 주의

    wi = item.weight                      # (i+1) 번째 아이템 무게
    pi = item.value                       # (i+1) 번째 아이템 가치

    for w in range(1, W + 1):             # 열 인덱스(용량 한도) 역시 0부터 시작

        previous_items_value = P[i][w]    # i번 행값을 이미 계산하였음. 예를 들어, P[0][w]
 = 0.

        if w >= wi:                       # 현재 아이템의 가방에 들어갈 수 있는 경우

            previous_items_value_without_wi = P[i][w - wi]

            P[i+1][w] = max(previous_items_value,
                            previous_items_value_without_wi + pi)

        else:                             # 현재 아이템이 너무 무거운 경우
            P[i+1][w] = previous_items_value
```

- 위 과정을 하나의 함수로 지정

In [14]:
```
def knapsack(items, W):
    """
    items: 아이템(물건)들의 리스트
    W: 최대 저장용량
    """

    # 아이템(물건) 개수
    n = len(items)

    # P[i][w]를 담는 2차원 행렬을 영행렬로 초기화
    # (n+1) x (W+1) 모양
    P = [[0.0 for _ in range(W+1)] for _ in range(n+1)]

    for i, item in enumerate(items):
        wi = item.weight                          # (i+1) 번째 아이템 무게
        pi = item.value                           # (i+1) 번째 아이템 가치

        for w in range(1, W + 1):
            previous_items_value = P[i][w]        # i번 행값을 이미 계산하였음. i는 0부터 시작함
의 주의할 것
            if w >= wi:                           # 현재 아이템의 무게가 가방에 들어갈 수 있는 경
우
                previous_items_value_without_wi = P[i][w - wi]
                P[i+1][w] = max(previous_items_value,
                                previous_items_value_without_wi + pi)
            else:
                P[i+1][w] = previous_items_value

    return P
```

- 최적의 조합을 알려주는 알려주는 함수
    - 생성된 2차 행렬 P로부터 최적의 조합 찾아낼 수 있음.

In [15]:
```
def solution(items, W):
    P = knapsack(items, W)
    n = len(items)
    w = W

    # 선택 아이템 저장
    selected = []

    # 선택된 아이템을 역순으로 확인
    for i in range(n, 0, -1):
        if P[i - 1][w] != P[i][w]:         # (i-1) 번째 아이템이 사용된 경우. 인덱스가 0부
터 출발함에 주의
            selected.append(items[i - 1])
            w -= items[i - 1].weight         # (i-1) 번째 아이템의 무게 제거
    return selected
```

- 획득된 최대 값어치를 알려주는 함수

In [16]:
```python
def max_value(items, W):
    selected = solution(items, W)
    sum = 0

    for item in selected:
        sum += item.value

    return sum
```

활용 1

In [17]:
```
for item in solution(items, 15):
    print(item)
```

```
Item(name='item4', weight=4, value=10)
Item(name='item3', weight=2, value=2)
Item(name='item2', weight=1, value=2)
Item(name='item1', weight=1, value=1)
```

In [18]:
```
max_value(items, 15)
```

Out[18]:
```
15
```

활용 2

- 행렬 P를 살펴보기 위한 좀 작은 용량의 배낭채우기 문제

In [19]:

```
items2 = [Item("item1", 1, 5),
          Item("item2", 2, 10),
          Item("item3", 1, 15)]
```

- 최대용향 3까지 허용할 때 최대 값어치로 이루어진 `(4, 4)` 모양의 행렬 P

In [20]:
```python
knapsack(items2, 3)
```

Out[20]:
```
[[0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
 [0.0, 5.0, 5.0, 5.0],
 [0.0, 5.0, 10.0, 15.0],
 [0.0, 15.0, 20.0, 25.0]]
```

- 행렬 P로부 최적의 조합 알아내기
  - 오직 아래 등식이 성립할 때 i 번째 아이템이 선택됨.

$$P[i][w] \neq P[i-1][w], \qquad P[i][w] = p_i + P[i-1][w-w_i]$$

- 따라서 $P[4][4]$에서 시작하여 역순으로 사용되는 아이템 확인 가능

In [21]:
```python
for item in solution(items2, 3):
    print(item)
```

```
Item(name='item3', weight=1, value=15)
Item(name='item2', weight=2, value=10)
```

NamedTuple 클래스를 사용하지 않는 경우

- 기본 클래스 정의를 활용하면 해야할 일이 좀 더 많아짐.

In [22]:
```python
class Item1:
    def __init__(self, name, weight, value):
        self.name = name
        self.weight = weight
        self.value = value
```

In [23]:
```python
items3 = [Item1("item1", 1, 1),
          Item1("item2", 1, 2),
          Item1("item3", 2, 2),
          Item1("item4", 4, 10),
          Item1("item5", 12, 4)]
```

In [24]:
```python
for item in solution(items3, 15):
    print(item)
```

```
<__main__.Item1 object at 0x7fc96e03a8b0>
<__main__.Item1 object at 0x7fc96e03abb0>
<__main__.Item1 object at 0x7fc96e03a820>
<__main__.Item1 object at 0x7fc96e03a9a0>
```

- `__str__()` 메서드 구현 필요

In [25]:
```
class Item1:
    def __init__(self, name, weight, value):
        self.name = name
        self.weight = weight
        self.value = value

    def __str__(self):
        return 'Item(' + self.name + ', ' + str(self.weight) + ', ' + str(self.val
ue) + ')'
```

In [26]:
```
items4 = [Item1("item1", 1, 1),
          Item1("item2", 1, 2),
          Item1("item3", 2, 2),
          Item1("item4", 4, 10),
          Item1("item5", 12, 4)]
```

In [27]:
```
for item in solution(items4, 15):
    print(item)
```

```
Item(item4, 4, 10)
Item(item3, 2, 2)
Item(item2, 1, 2)
Item(item1, 1, 1)
```

시간복잡도

- 입력크기: 물건(item) 수 n과 가장 최대 용량 W
- 단위연산: 채워야 하는 행렬 P의 크기

$$nW \in \Theta(nW)$$

절대 선형이 아님!

- 예를 들어, $W = n!$이면, $\Theta(n \cdot n!)$의 복잡도가 나옴.
- 즉, W 값에 복잡도가 절대적으로 의존함.

개선된 알고리즘

- 행렬 P 전체를 계산할 필요 없음.

- $P[n][W]$ 을 계산하기 위해 필요한 값들만 계산하도록 하면 됨.
  - 교재 참조

- 이렇게 구현하면 아래의 복잡도를 갖는 알고리즘 구현 가능

$$O(\min(2^n, nW))$$

연습문제

문제 1

`dijkstra()` 함수가 항상 최단경로에 대한 정보를 생성함을 증명하라.

문제 2

`dijkstra()` 함수는 최단경로에 포함된 이음선만 찾는다. 최단경로와 최단길이를 반환하는 함수 `dijkstra_path()` 함수를 구현하라.

문제 3

아래 표로 표현되는 방향그래프의 마디 v4에서 다른 마디로 가는 최단경로를 구하는 과정을 단계별로 설명하라.

	1	2	3	4	5	6
1	0	∞	72	50	90	35
2	∞	0	71	70	73	75
3	72	71	0	∞	77	90
4	50	70	∞	0	60	40
5	90	73	77	60	0	80
6	35	75	90	40	80	0

- 위 표를 2차원 행렬로 표현하면 다음과 같음.

In [28]:
```
W = [[  0, inf,  72,  50,  90,  35],
     [inf,   0,  71,  70,  73,  75],
     [ 72,  71,   0, inf,  77,  90],
     [ 50,  70, inf,   0,  60,  40],
     [ 90,  73,  77,  60,   0,  80],
     [ 35,  75,  90,  40,  80,   0]]
```

- 다익스트라 알고리즘에 의해 v5에서 각 마디로 가는 최단경로를 찾는 과정은 다음과 같음.
    - Y = {5}
        - v5에서 Y에 속한 마디들만을 통해 갈 수 있는 가장 가까운 마디는 거리가 60인 v4
    - Y = {5, 4}
        - v5에서 Y에 속한 마디들만을 통해 갈 수 있는 가장 가까운 마디는 v5에서 직접 연결되고 거리가 73인 v2
        - v4를 통해 Y에 속하지 않는 마디로 가는 경로는 모두 73보다 크기 때문임.
            - length(v5 -> v4 -> v?) >= 60 + 40 = 100
    - Y = {5, 4, 2}
        - v5에서 Y에 속한 마디들만을 통해 갈 수 있는 가장 가까운 마디는 v5에서 직접 연결되고 거리가 77인 v3
        - v2를 통해 Y에 속하지 않는 마디로 가는 경로는 모두 77보다 크기 때문임.
            - length(v5 -> v2 -> v?) >= 73 + 70 = 143

- 다익스트라 알고리즘(이어짐)
    - Y = {5, 4, 2, 3}
        - v5에서 Y에 속한 마디들만을 통해 갈 수 있는 가장 가까운 마디는 v5에서 직접 연결되고 거리가 80인 v6
        - v3를 통해 Y에 속하지 않는 마디로 가는 경로는 모두 80보다 크기 때문임.
            - length(v5 -> v3 -> v?) >= 77 + 71 = 147
    - Y = {5, 4, 2, 3, 6}
        - v5에서 Y에 속한 마디들만을 통해 갈 수 있는 가장 가까운 마디는 v5에서 직접 연결되고 거리가 90인 v1
        - v6를 통해 Y에 속하지 않는 마디로 가는 경로는 모두 90보다 크기 때문임.
            - length(v5 -> v6 -> v?) >= 80 + 35 = 115
    - Y = {5, 4, 2, 3, 6, 1}

- 실제로 `dijkstra_gen()` 함수를 이용한 아래 결과와 동일함.
- 인덱스에 1을 더해야 함에 주의할 것.

In [29]:

```
dijkstra_gen(4,W)
```

Out[29]:

```
defaultdict(list, {4: [3, 1, 2, 5, 0]})
```