4장 탐욕 알고리즘

주요 내용

- 1절 최소비용 신장트리: 프림 알고리즘
- 2절 단일출발점 최단경로: 다익스트라 알고리즘
- 5절 탐욕 알고리즘과 동적계획법 알고리즘 비교: 0-1 배낭채우기 문제

탐욕 알고리즘이란?

- 선택 순간의 최적(locally optimal) 대상을 선택하는 기법
- 동적계획법과 마찬가지로 최적화 문제를 풀기 위해 주로 사용됨.
- 차이점: 입력사례를 분할하지 않음.

예제: 거스름돈 문제

- 문제: 거스름돈 360원 돌려주기
- 조건: 사용하는 동전 개수 최소화하기
- 동전 종류
    - 500원
    - 250원
    - 100원
    - 50원
    - 10원

해결책: 탐욕 알고리즘 활용

- 가장 큰 액수의 동전부터 최대한 많이 사용

```
500원: 0개
250원: 1개
100원: 1개
50원: 0개
10원: 1개
```

- 항상 동전의 개수가 최소가 되도록 거스름돈을 돌려줄 수 있음.
    - 증명 생략

탐욕 알고리즘의 한계

- 탐욕 알고리즘이 항상 최적의 해답을 제시하지는 못함.

- 따라서 탐욕적 알고리즘을 적용하여 얻은 결과가 최적의 해답인지 여부를 따로 검증해야 함.

반례

- 160원을 거슬러주어야 하는데 동전 종류가 다음과 같은 경우
    - 120원
    - 100원
    - 50원
    - 10원

- 탐욕 알고리즘 해법: 5개 동전 필요

```
120원: 1개
100원: 0개
 50원: 0개
 10원: 4개
```

- 최적 해법: 3개 동전 필요

```
120원: 0개
100원: 1개
 50원: 1개
 10원: 1개
```

탐욕 알고리즘 기본 아이디어

- 공집합에서 출발하여 해당 집합에 원소를 아래 과정을 거쳐 문제의 해답을 얻을 때까지 추가

1) 선택과정: 지정된 기준에 따라 집합에 추가할 최적의 원소 선택.

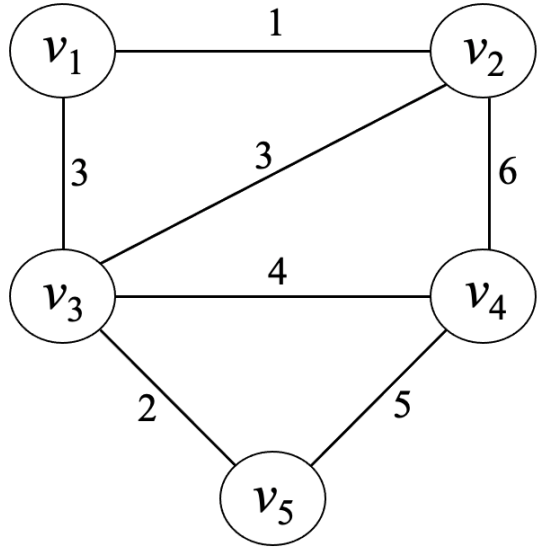
2) 적절성 검사: 선택된 원소가 추가된 새로운 집합의 적절성 판단

3) 해답점검: 새로운 집합이 문제의 해답인지 여부 판단.

- 해답이면 종료.
- 그렇지 않으면 선택과정부터 다시 반복

1절 최소비용 신장트리

가중치 포함 비방향그래프



- 가중치: 음이 아닌 수.

- 이음선(edge, 변): 방향 없음.
    - 두 마디 사이에 단순히 "이음선이 있다"라고만 말함.

경로

- 경로(path): 연결된 이음선으로 이루어진 마디의 나열
    - 마디 u에서 마디 v로 가는 경로가 존재하면, v에서 u로 가는 경로도 존재. (이음선에 방향성이 없기 때문)

- 두 마디의 연결성 = 두 마디 사이에 경로의 존재 여부

- **연결된 그래프**: 모든 마디 사이에 경로가 존재하는 그래프

단순순환경로(simple cycle)와 트리

- 어떤 마디에서 출발하여 다시 돌아오는 경로에 서로 다른 3개의 마디가 있고, 경로상의 모든 마디가 서로 다른 경로

- 비순환적 비방향그래프: 단순순환경로를 전혀 포함하지 않는 비방향그래프

- **트리**: 연결된 비순환적 비방향그래프

신장트리(spanning tree)

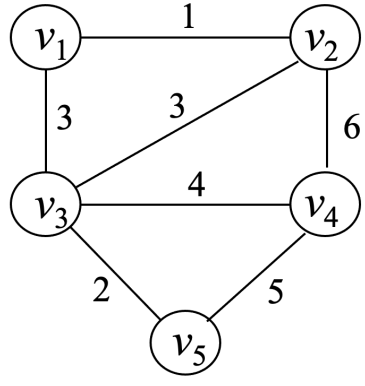
- 가정: 가중치를 포함하며 연결된 비방향그래프 G가 주어졌음.
- G의 신장트리: G의 마디는 그대로 두면서 이음선의 일부를 제거하여 만들어진 트리
- G의 최소비용 신장트리: 트리에 포함된 이음선의 가중치들의 합이 최소인 G의 신장트리

신장트리의 특징

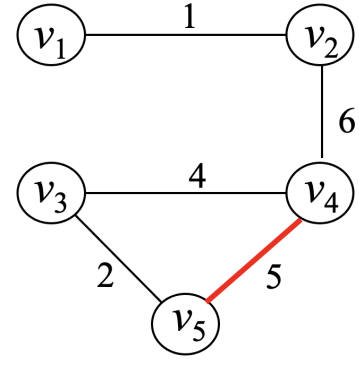
- 모든 신장트리가 최소비용 신장트리는 아님.
- 여러 개의 최소비용 신장트리 존재 가능.

예제

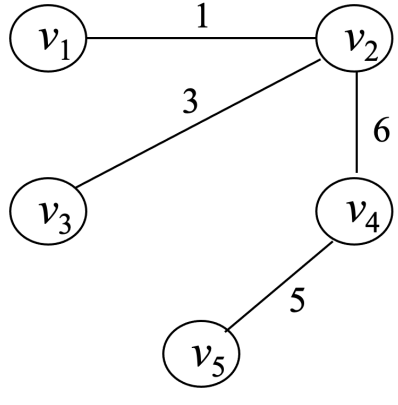
(a) 가중치 포함, 연결된 비방향그래프 G



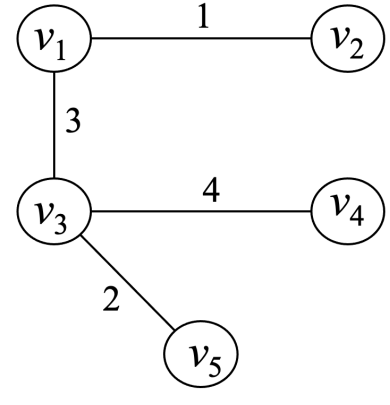
(b) 이음선 (v_4, v_5)를 제거해도 연결성 유지됨



(c) G의 신장트리



(d) G의 최소비용 신장트리



최소비용 신장트리 활용 예제

- 도로건설: 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 문제
- 통신: 통신선의 길이가 최소가 되도록 통신케이블 망을 구성하는 문제
- 배관: 배관의 총 길이가 최도가 되도록 연결하는 문제

최소비용 신장트리 구하기: 무작정 방법(brute-force method)

- 알고리즘: 모든 신장트리를 확인하여 최소비용 신장트리 선택하기
- 복잡도: 최악의 경우 지수함수 복잡도보다 나쁨. 예를 들어, 아래 복잡도보다 나쁨.

$$\Theta(n^{n-2})$$

프림(Prim) 알고리즘

전제조건

- 가중치를 포함하고 연결된 비방향그래프 G가 아래와 같이 주어졌음:

$$G = (V, E)$$

- V: 마디들의 집합
- E: 이음선들의 집합

프림 알고리즘 기본 아디이어

$G = (V, E)$

$Y = \{v_1\}$
$F = \emptyset$

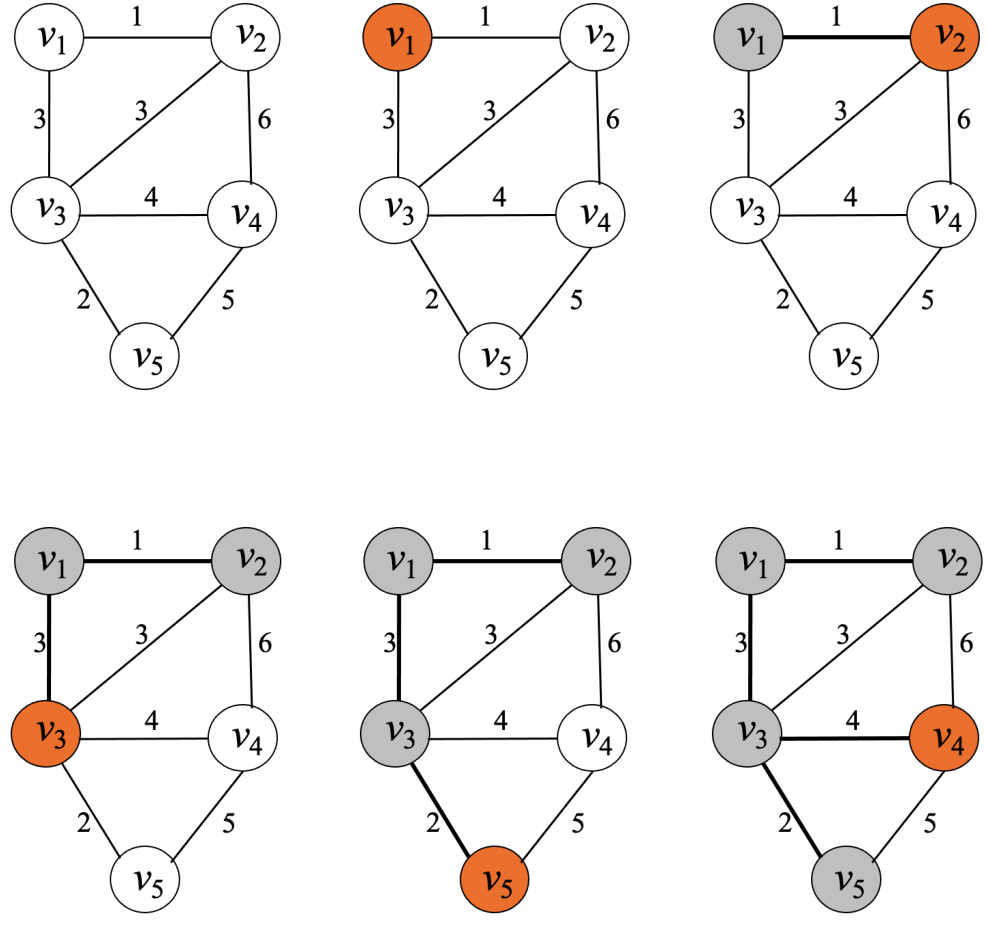
while (사례 미해결):

$(V - Y)$에 속한 마디 중에서 Y와 가장 가까운(최소거리) 마디 선택

해당 마디를 Y에 추가
해당 마디 선택에 사용된 이음선을 F에 추가

if ($Y == V$):
사례해결

예제



프림 알고리즘의 최적여부 증명

- 프림 알고리즘이 항상 최소비용 신장트리를 생성하는지 증명해야 함.

- 결과가 신장트리라는 것은 확실함.
    - $(V == Y)$ 일 때 종료.
    - 모든 마디가 서로 연결됨.
    - 단순순환경로 존재하지 않음.

- 하지만 최소비용 신장트리 여부는 불확실함.

유망한 이음선 집합

- 전제:

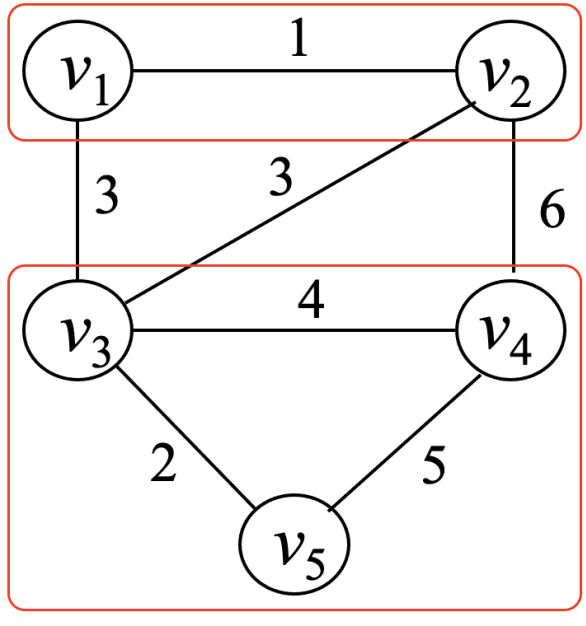
  $G = (V, E)$ 이고 $F \subseteq E$

- F에 이음선을 추가하여 최소비용 신장트리를 만들 수 있을 때 "F는 유망하다(promissing)" 라고 부름.

보조정리

- 전제 1: $G = (V, E)$ 이고 $F(\subseteq E)$는 유망함.
- 전제 2: Y는 F에 사용된 마디들의 집합
- 전제 3: Y에 있는 정점과 $(V - Y)$에 있는 정점을 잇는 이음선 중에서 가중치가 가장 적은 이음선 중에 하나가 e.
- 결론: $F \cup \{e\}$ 또한 유망함.

보조정리 증명 (그림으로 설명)



정리

- 프림 알고리즘은 항상 최소비용 신장트리를 생성한다.

증명 (귀납법 사용)

- 귀납법을 사용하여 while 반복문에서 확장되는 F가 항상 유망하다는 것을 증명함.

- 귀납기초: 공집합은 당연히 유망함.

- 귀납단계: 보조정리에 의해 while 반복문에서 확장되는 F는 언제나 유망함.
    - 귀납가정: while 반복문이 시작할 때 F가 유망하다고 가정
    - 귀납절차: 보조정리에 의해 $F \cup \{e\}$도 유망함. (알고리즘 참조)

- 귀납증명 완료

프림 알고리즘 구현

In [1]:
```
from math import inf
from collections import defaultdict
```

In [2]:

```
def prim(W):
    V = len(W)                          # 마디: 그래프 행의 인덱스를 마디 이름으로 사용
    F = defaultdict(list)               # 신장트리에 포함될 이음선들의 집합.
                                        # 키: 마디,
                                        # 키값: 추가되는 이음선에 사용된 다른 마디들의 리스트
    nearest = [0] * V                   # i번 인덱스 값: 신장트리에 속한 마디 중 가장 가까운 마디
    distance = [W[0][i] for i in range(V)]  # i번 인덱스 값: nearest[i]와 i를 잇는
                                        # 이음선의 가중치. -1이면 이미 신장트리에 포함된 것으로 간주
    distance[0] = -1                    # V0 는 이미 포함되어 있다고 가정
    for _ in range(V-1):                # 신장트리에 속할 이음선을 모든 마디가 선택될 때까지 하나씩 추가
        # distance 정보를 이용하여 아직 신장트리에 속하지 않으면서 가장 가까운 마디 선택
        min = inf
        for i in range(1, V):
            if (0 < distance[i] < min):
                min = distance[i]
                vnear = i
        # 선택된 마디와 가장 가까운 마디 사이의 이음선을 신장트리에 추가
        F[nearest[vnear]].append(vnear)
        distance[vnear] = -1    # 선택된 마디 표시
        # 모든 마디를 대상으로 distance와 nearest 업데이트 (F가 수정되었기 때문)
        for i in range(1, V):
            if W[i][vnear] < distance[i]:
                distance[i] = W[i][vnear]
                nearest[i] = vnear
    return F                            # 신장트리 반환
```

In [3]:
```
W = [[0,   1,   3,   inf, inf],
     [1,   0,   3,   6,   inf],
     [3,   3,   0,   4,   2  ],
     [inf, 6,   4,   0,   5  ],
     [inf, inf, 2,   5,   0  ]]
```

In [4]:
```
prim(W)
```

Out[4]:
```
defaultdict(list, {0: [1, 2], 2: [4, 3]})
```

코드 설명

```
V = len(W)                      # 마디: 그래프 행의 인덱스를 마디 이름으로 사용
F = defaultdict(list)           # 신장트리에 포함될 이음선들의 집합.
                                # 키: 마디,
                                # 키값: 추가되는 이음선에 사용된 다른 마디들의 리스트


nearest = [0] * V                               # i번 인덱스 값: 신장트리에 속한 마디 중 가장 가까운
마디
distance = [W[0][i] for i in range(V)]  # i번 인덱스 값: nearest[i]와 i를 잇는 이음선의
 가중치
                                                # -1 이면 이미 신장트리에 포함된 것으로 간주
distance[0] = -1                                # V0 는 이미 포함되어 있다고 가정
```

```
for _ in range(V-1):          # 신장트리에 속할 이음선을 모든 마디가 선택될 때가지 하나씩 추가


# distance 정보를 이용하여 아직 신장트리에 속하지 않으면서 가장 가까운 마디 선택
    min = inf
    for i in range(1, V):
        if (0 < distance[i] < min):
            min = distance[i]
            vnear = i


# 선택된 마디와 가장 가까운 마디 사이의 이음선을 신장트리에 추가
    F[nearest[vnear]].append(vnear)
    distance[vnear] = -1                  # 선택된 마디 표시


# 모든 마디를 대상으로 distance와 nearest 업데이트 (F가 수정되었기 때문)
    for i in range(1, V):
        if W[i][vnear] < distance[i]:
            distance[i] = W[i][vnear]
            nearest[i] = vnear
```

프림 알고리즘 일정 시간복잡도 분석

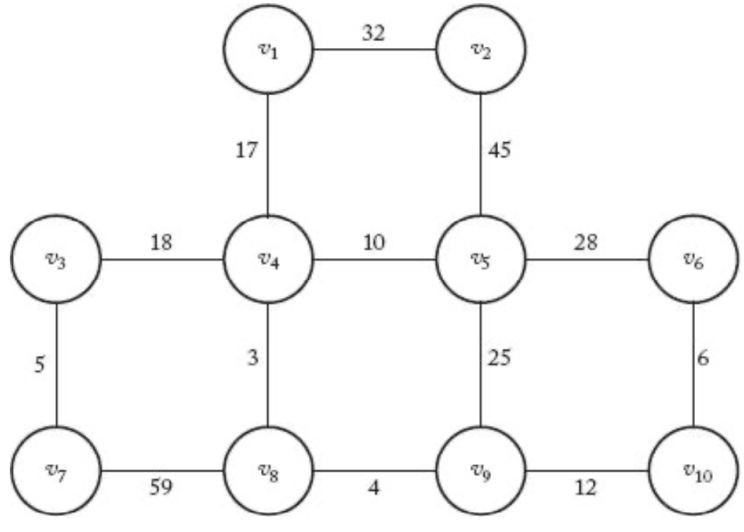
- 입력크기: 마디 수 n
- 단위연산: 중첩 for 반복문
- 일정 시간복잡도: $n-1$ 번 반복되는 명령문 두 개가 $n-1$번 반복되는 반복문 안에 들어 있음. 따라서 다음이 성립:

$$T(n) = 2(n-1)(n-1) = \Theta(n^2)$$

연습문제

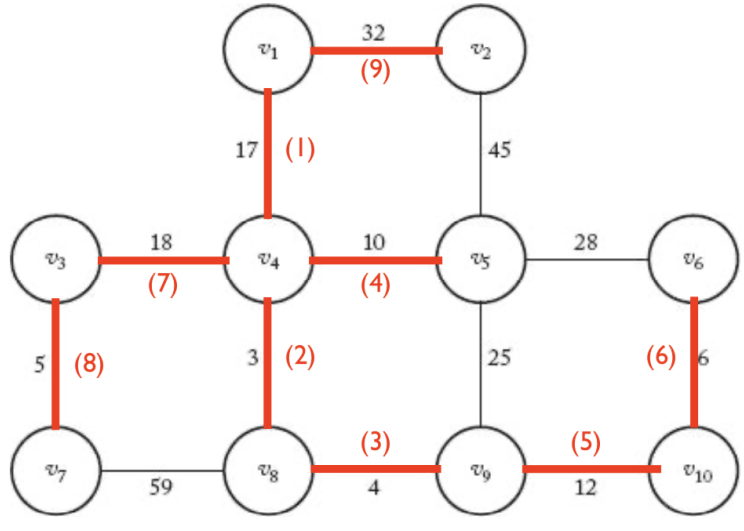
문제 1

아래 비방향그래프의 최소신장트리를 찾는 과정을 단계별로 묘사하라.



- 신장트리에 추가되는 이음선의 순서는 다음과 같음:
    - Y = {1}
        - v4-v1의 거리가 17로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4}
        - v8-v4의 거리가 3으로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8}
        - v9-v8의 거리가 4로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9}
        - v5-v4의 거리가 10으로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5}
        - v10-v9의 거리가 12로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5, 10}
        - v6-v10의 거리가 6으로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5, 10, 6}
        - v3-v4의 거리가 18로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5, 10, 6, 3}
        - v7-v3의 거리가 5로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5, 10, 6, 3, 7}
        - v2-v1의 거리가 32로 가장 짧음.
    - Y = {1, 4, 8, 9, 5, 10, 6, 3, 7, 2}

- 아래 그래프에서 확인할 수 있음. 빨강색 숫자는 최소비용신장트리에 추가되는 순서를 가리킴.



확인하기

- 위 비방향그래프를 2차원 행렬로 표기하면 다음과 같음.

In [5]:
```
W = [[  0,  32, inf,  17, inf, inf, inf, inf, inf, inf],
     [ 32,   0, inf, inf,  45, inf, inf, inf, inf, inf],
     [inf, inf,   0,  18, inf, inf,   5, inf, inf, inf],
     [ 17, inf,  18,   0,  10, inf, inf,   3, inf, inf],
     [inf,  45, inf,  10,   0,  28, inf, inf,  25, inf],
     [inf, inf, inf, inf,  28,   0, inf, inf, inf,   6],
     [inf, inf,   5, inf, inf, inf,   0,  59, inf, inf],
     [inf, inf, inf,   3, inf, inf,  59,   0,   4, inf],
     [inf, inf, inf, inf,  25, inf, inf,   4,   0,  12],
     [inf, inf, inf, inf, inf,   6, inf, inf,  12,   0]]
```

- 따라서 아래와 같이 최소비용신장트리를 확인됨.

In [6]:
```
prim(W)
```

Out[6]:
```
defaultdict(list, {0: [3, 1], 3: [7, 4, 2], 7: [8], 8: [9], 9: [5], 2: [6]})
```