6절 외판원 문제

외판원문제 정의

- 일주경로: 한 도시에서 출발하여 다른 모든 도시를 한 번씩만 들린 후 출발한 도시로 돌아오는 경로

- 최적일주경로: 최소거리 일주경로

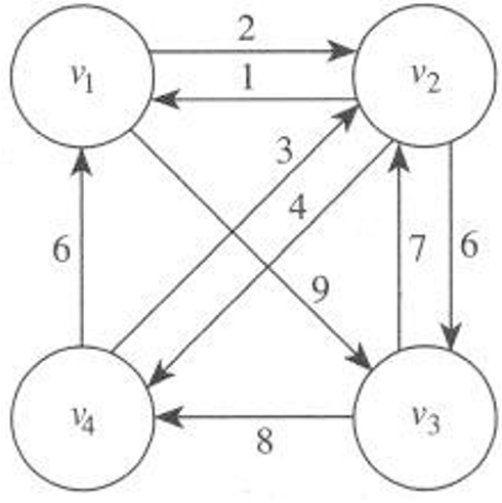
- 외판원문제: 최소한 하나의 일주경로가 존재하는 가중치포함 방향그래프에서 최적일주경로 찾기

주의사항

- 출발하는 도시가 최적일주경로의 길이와 무관함.
    - 어차피 일주경로를 따지기 때문.

- 따라서 한 지점(마디)에서 출발하는 일주경로만을 대상으로 알고리즘 구현.

예제



- v_1 을 출발점으로 하는 일주경로 3개.

$$length\,[v_1, v_2, v_3, v_4, v_1] = 22$$
$$length\,[v_1, v_3, v_2, v_4, v_1] = 26$$
$$length\,[v_1, v_3, v_4, v_2, v_1] = 21$$

- 마지막 경로가 최적.

무차별 대입 방식(brute force) 탐색

- v_1 부터 시작하는 모든 일주경로를 확인하는 방식

부르트포스 탐색 알고리즘

- 참조: 고전 컴퓨터 알고리즘 인 파이썬, 9장 (https://github.com/coding-alzi/ClassicComputerScienceProblemsInPython)

- 도시간 거리: 중첩 사전(딕셔너리)으로 구현
    - 키: 도시명
    - 키값(사전 자료형)
        - 키: 해당 도시와 이음선으로 연결된 도시
        - 키값: 그 도시로의 이동 거리

In [1]:
```
from math import inf
from itertools import permutations

city_distances = {
    "v1":
        {"v2": 2,
         "v3": 9},
    "v2":
        {"v1": 1,
         "v3": 6,
         "v4": 4},
    "v3":
        {"v2": 7,
         "v4": 8},
    "v4":
        {"v1": 6,
         "v2": 3}
}
```

- 도시명 모음

In [30]:
```
cities = list(city_distances.keys())
```

In [31]:
```
print(cities)
```

```
['v1', 'v2', 'v3', 'v4']
```

- v_1 에서 출발하는 모든 일주경로의 순열조합
    - v_1 을 제외한 나머지 $n-1$개의 도시로 만들 수 있는 모든 순열조합
        - 순열조합 수: $(n-1)!$
        - $n=4$일 경우: 총 $3!=6$개의 일주경로 존재.

- 주의: 이음선이 없는 경우가 포함된 경로는 이후 최적일주경로 선정 과정에서 제외처리될 것임.

- `city_permutations` 가 가리키는 값은 아래 6개의 항목으로 이루어진 이터러블 자료형

In [32]:
```
city_permutations = permutations(cities[1:])
```

```
('v2', 'v3', 'v4'),
('v2', 'v4', 'v3'),
('v3', 'v2', 'v4'),
('v3', 'v4', 'v2'),
('v4', 'v2', 'v3'),
('v4', 'v3', 'v2')
```

- v_1 에서 출발하는 일주경로 완성을 위해 출발도시를 처음과 마지막 항목으로 추가

In [26]:
```
tsp_paths = [(cities[0],) + c + (cities[0],) for c in city_permutations]
```

- `tsp_paths`는 v_1 에서 시작하는 모든 일주경로의 목록을 담은 리스트.

```
[('v1', 'v2', 'v3', 'v4', 'v1'),
 ('v1', 'v2', 'v4', 'v3', 'v1'),
 ('v1', 'v3', 'v2', 'v4', 'v1'),
 ('v1', 'v3', 'v4', 'v2', 'v1'),
 ('v1', 'v4', 'v2', 'v3', 'v1'),
 ('v1', 'v4', 'v3', 'v2', 'v1')]
```

최단 일주경로 길이 확인하기

- v_1 에서 출발하는 모든 일주경로를 대상으로 경로의 길이를 계산하는 단순한 코드임.

- `best_path`: 최적일주경로 저장
    - 초기값은 `None`.
- `best_distance`: 최적일주경로의 길이 저장
    - 초기값은 무한대(`inf`).
    - `inf`: 어떤 수보다 큰 값을 나타내는 기호.

In [37]:
```
best_path = None
min_distance = inf
```

- 모든 경로를 대상으로 길이를 확인한 다음 최적일주경로의 길이를 업데이트함.

- 일주경로상에서 두 마디 사이에 이음선이 존재하지 않으면 일주경로의 길이를 무한대(`inf`)로 처리함.
    - 이런 방식으로 실제로 존재하지 않는 일주경로를 최소거리 경쟁에서 제외시킴.

- 두 마디 사이에 이음선 존재여부 확인
    - 사전 자료형의 `get` 메서드가 `None`을 반환하는 성질 활용

- last와 next 를 차례대로 업데이트하면서 일주경로의 길이 계산
    - last: 경로상에서 외판원의 현재 위치
    - next: 경로상에서 외판원이 방문할 다음 위치

In [41]:
```
for path in tsp_paths:
    distance = 0
    last = path[0]

    for next in path[1:]:
        last2next = city_distances[last].get(next)

        if last2next:                       # last에서 next로의 경로가 존재하는 경우
            distance += last2next

        else:                               # last에서 next로의 경로가 존재하지 않는 경우 None
반환됨.
            distance = inf                  # 무한대로 처리하며, 결국 최솟값 경쟁에서 제외됨.
        last = next

    if distance < min_distance:             # 최단경로를 업데이트 해야 하는 경우
        min_distance = distance
        best_path = path
```

In [40]:
```
print(f"최적일주경로는 {best_path}이며 길이는 {min_distance}이다.")
```

```
최적일주경로는 ('v1', 'v3', 'v4', 'v2', 'v1')이며 길이는 21이다.
```

- 함수로 정리하기

In [68]:
```
def tsp_bruteforce(city_distances:dict):
    # v1에서 시작하는 모든 일주경로 확인
    cities = list(city_distances.keys())
    city_permutations = permutations(cities[1:])
    # 최적경로와 최단길이 기억
    best_path = None
    min_distance = inf

    # 각 일주경로의 길이확인. 동시에 최적경로와 최단길이 업데이트
    for path in tsp_paths:
        distance = 0
        last = path[0]
        for next in path[1:]:
            last2next = city_distances[last].get(next)
            if last2next:                       # last에서 next로의 경로가 존재하는 경우
                distance += last2next
            else:                               # last에서 next로의 경로가 존재하지 않는 경우 N
one 반환됨.
                distance = inf                  # 무한대로 처리하며, 결국 최솟값 경쟁에서 제외됨.
            last = next
        if distance < min_distance:             # 최단경로를 업데이트 해야 하는 경우
            min_distance = distance
            best_path = path
    # 최적경로와 최단길이 반환
    return best_path, min_distance
```

In [67]:
```
best_path, min_distance = tsp_bruteforce(city_distances)

print(f"최적일주경로는 {best_path}이며 길이는 {min_distance}이다.")
```

최적일주경로는 ('v1', 'v3', 'v4', 'v2', 'v1')이며 길이는 21이다.

부르트포스 탐색 시간복잡도

- 입력크기: 도시(마디) 수 n
- 단위연산: v_1 을 제외한 나머지 $n-1$개의 도시를 일주하는 경로의 모든 경로를 고려하는 방법

$$(n-1)(n-2)\cdots 1 = (n-1)! \in \Theta(n!)$$

- 설명: 하나의 도시에서 출발해서
    - 둘째 도시는 $(n-1)$개 도시 중 하나,
    - 셋째 도시는 $(n-2)$개 도시 중 하나,
    - ....
    - $(n-1)$번째 도시는 2개 도시 중 하나,
    - 마지막 n번째 도시는 남은 도시 하나.

더 좋은 알고리즘

- 외판원 문제에 대한 쉬운 해결책은 없음.
- 도시가 많은 경우 대부분의 알려진 알고리즘은 최적일주경로의 근사치를 계산함.
- 동적계획법 또는 유전 알고리즘을 이용하면 시간복잡도가 **조금** 더 좋은 알고리즘 구현 가능
    - 하지만 모두 지수함수 이상의 복잡도를 가짐.

동적계획법으로 구현한 외판원문제 알고리즘 복잡도

- 일정 시간복잡도: $\Theta(n^2\ 2^n)$
- 일정 공간복잡도: $\Theta(n\ 2^n)$
- 부르트포스 알고리즘보다 훨씬 빠르기는 하지만 여전히 실용성은 없음.
    - 실제로 구현하기도 쉽지 않음.
    - 다양한 트릭이 있지만 알고리즘 공부에 별 도움되지 않음.
- 유전 알고리즘 기법을 활용하여 적절한 근사치를 빠르게 계산하는 알고리즘에 대한 연구가 많이 진행되어 왔음.
    - 필요할 경우 가정 적절한 유전 알고리즘 활용해야 함.

다항식 시간복잡도 알고리즘은?

- 다항식 복잡도를 갖는 외판원문제 해결 알고리즘 알려지지 않음.
- 그런 알고리즘은 존재할 수 없다는 증명도 알려지지 않음.
- 이와같이 해답구하기가 매우 어려운 문제들에 대해 9장에서 좀 더 상세히 다룸.