

## 3장 동적계획법

## 주요 내용

## 1편

- 1절 이항계수 구하기
- 2절 플로이드-워셜 최단경로 알고리즘
- 3절 동적계획법과 최적화 문제

## 2편

- 4절 외판원 문제

# 동적계획법

- 분할정복 알고리즘과 유사함.
- 문제의 입력사례를 분할하여 문제를 해결함
- 하지만, 작은 입력사례에 대한 결과를 기억해 두고, 나중에 필요할 때 사용한다는 점에서 분할정복과 다름.

## 하향식 대 상향식

- 분할정복: 하향식(top-down) 방식. 재귀 알고리즘으로 구현하기에 매우 적절함.
- 동적계획법: 상향식(bottom-up) 방식. 작은 입력사례의 결과를 기억해둔 후 필요할 때 활용.

## 계획(programming)의 어원

- 계획(programming)의 원래 의미: 저장용도의 배열 구현하기
- 여기서는 다양한 형태의 배열 활용법을 다룸.

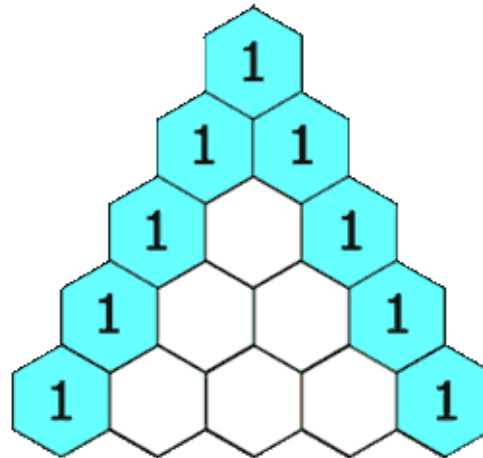


**1절 이항계수 구하기**

## 파스칼의 삼각형

- 이전 행의 두 원소를 더해 새로운 원소를 추가해서 만드는 삼각형
- $n$ 번 행의  $k$ 번째 값  $a_{n,k}$ 에 대해 다음 점화식 성립:

$$a_{n,k} = a_{(n-1),(k-1)} + a_{(n-1),k}$$



<출처: [파스칼의 삼각형\(위키피디아\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle) (https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s\_triangle)>

## 이항계수

- 파스칼의 삼각형에 사용된 값은 이항계수와 동일. 이유는 잠시 뒤 설명.

$$a_{n,k} = \binom{n}{k}$$

## 이항계수의 의미 1

- 서로 다른  $n$  개의 구슬 중에서 임의로 서로 다른  $k$  개의 구슬을 선택하는 방법 (단,  $0 \leq k \leq n$ ).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 이항계수의 의미 2

- 아래 다항식의 계수:

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= b_{n,0} x^n y^0 + b_{n,1} x^{n-1} y^1 + b_{n,2} x^{n-2} y^2 + \cdots + b_{n,(n-1)} x^1 y^{n-1} + b_{n,n} x^0 y^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n b_{n,k} x^{n-k} y^k\end{aligned}$$

- 응용 예제

$$\begin{aligned} 2^n &= (1 + 1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \end{aligned}$$

## 이항계수와 파스칼의 삼각형

이항계수에 대해 아래 점화식 성립

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, & 0 < k < n \\ 1, & k \in \{0, n\} \end{cases}$$



## 증명

- $\binom{n}{k}$ : 1부터  $n$ 까지 번호가 붙은  $n$ 개의 구슬에서 서로 다른  $k$ 개의 구슬을 선택하는 방법의 수
- $k = 0$ : 구슬을 전혀 선택하지 않는 하나의 방법 존재
- $k = n$ : 구슬 전체를 선택하는 하나의 방법 존재

- $0 < k < n$ 이라고 가정. 다음 두 경우 발생

- $n$ 번 구슬이 선택되는 경우: 1부터  $n - 1$ 번까지의 구슬에서  $k - 1$ 개의 구슬을 선택하는 방법의 수

$$\binom{n-1}{k-1}$$

- $n$ 번 구슬이 선택되지 않는 경우: 1부터  $n - 1$ 번까지의 구슬에서  $k$ 개의 구슬을 선택하는 방법의 수

$$\binom{n-1}{k}$$

- 따라서 다음 성립:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- 2차원 행렬 형식으로 표현하면 다음과 같음.

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...
```

## 이항계수 알고리즘 구현: 재귀 (분할정복)

- 문제: 이항계수 계산
- 입력 파라미터: 음이 아닌 정수  $n$ 과  $k$ , 단,  $k \leq n$ .
- 반환값:  $\binom{n}{k}$

## 이항계수 재귀 알고리즘

```
In [1]: def bin(n, k):  
        # 초기값  
        if k == 0 or k == n:  
            return 1  
        # 재귀  
        else:  
            return bin(n-1, k-1) + bin(n-1, k)
```

- 참고: 재귀 피보나찌 수열 함수와 유사. (1장)

```
def fib(n):  
    if (n <= 1):  
        return n  
    else:  
        return fib(n-2) + fib(n-1)
```

## bin 알고리즘의 복잡도

- 매우 비효율적임.
- 이유: 반복된 계산이 매우 많음. 피보나찌 수열의 경우와 유사.
- 예를 들어,  $\text{bin}(n-1, k-1)$  과  $\text{bin}(n-1, k)$  는 둘 모두 서로 독립적으로  $\text{bin}(n-2, k-1)$  를 계산함.

- $\text{bin}(n, k)$  계산을 위해 필요한  $\text{bin}()$  함수 호출 횟수 (증명 생략):

$$2 \binom{n}{k} - 1$$

- 기본적으로 지수함수 정도의 나쁜 시간복잡도를 가짐. 이유:

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}$$



**이항계수 알고리즘 구현: 동적계획법**

- 반복을 이용한 피보나찌 함수 구현에 사용된 아이디어임.
- 작은 입력사례에 대한 결과를 배열에 저장해두고 필요할 경우 재활용함.

- 아래 피보나찌 함수를 동적계획법으로 구현한 것과 유사하게 구현 가능.

```
def fib2(n):  
    f = []  
  
    f.append(0)  
    if n > 0:  
        f.append(1)  
        for i in range(2, n+1):  
            fi = f[i-2] + f[i-1]  
            f.append(fi)  
    return f[n]
```

- $\binom{n}{k}$ 를 구하기 위해 아래 그림과 같이 2차원 행렬  $B$ 의 항목을 채워나가야 함.
  - $B[0][0]$ 에서 시작
  - 위에서 아래로 재귀 관계식을 적용하여 파스칼의 삼각형을 완성해 나가야 함.

	0	1	2	3	4	$j \dots k$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
$i$						
$\vdots$						
$n$						

$B[i-1, j-1]$      $B[i-1, j]$

## 리스트 조건제시법 활용 예제

- 일정 모양의 리스트를 생성할 때 유용함.
- 알고리즘에 사용될 행렬  $B$ 를 영행렬로 초기화할 때 사용.

```
In [2]: # n = 5, k = 3 인 경우 6x4 크기의 영행렬 생성하기  
# 리스트 조건제시법 활용  
  
[[0 for _ in range(3+1)] for _ in range(5+1)]
```

```
Out[2]: [[0, 0, 0, 0],  
         [0, 0, 0, 0],  
         [0, 0, 0, 0],  
         [0, 0, 0, 0],  
         [0, 0, 0, 0],  
         [0, 0, 0, 0]]
```

In [3]: # 이분검색 동적계획법

```
def bin2(n, k):  
    # n x k 모양의 행렬 준비하기.  
    # 리스트 조건제시법 활용  
  
    B = [[0 for _ in range(k+1)] for _ in range(n+1)]  
  
    for i in range(n+1):  
        for j in range(min(i, k) + 1):  
            if j == 0 or j == i:  
                B[i][j] = 1  
            else:  
                B[i][j] = B[i-1][j-1] + B[i-1][j]  
  
    return B[n][k]
```

## 실행시간 비교

- 재귀 알고리즘과 동적계획법 알고리즘 비교

- $n = 30, k = 14$ 에 대해 동적계획법 알고리즘은 바로 계산

```
In [4]: bin2(30, 14)
```

```
Out[4]: 145422675
```

- 반면에 재귀 알고리즘은 30여초 이상 걸림.  $n, k$ 가 좀 더 커지면 매우 오래 걸림.

```
In [5]: import time

start = time.time()
bin(30,14)
end = time.time()
print(end-start)
```

```
28.078381061553955
```



## 동적계획법 알고리즘 시간복잡도

- 입력 크기:  $n$ 과  $k$
- 단위연산:  $j$  변수에 대한 for 반복문 실행횟수

$i = 0$ 일 때: 1회  
 $i = 1$ 일 때: 2회  
 $i = 2$ 일 때: 3회  
...  
 $i = k-1$ 일 때:  $k$ 회  
 $i = k$ 일 때:  $k+1$ 회  
 $i = (k+1)$ 일 때:  $k+1$ 회  
...  
 $i = n$ 일 때:  $k+1$ 회

- 따라서 다음 성립

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) \cdot (n - k + 1) = \frac{(2n - k + 2)(k + 1)}{2}$$
$$\in \Theta(n k)$$

**동적계획법 알고리즘 개선하기**

## 방법 1

- 길이가  $k + 1$ 인 1차원 배열 이용 가능
- 이유:  $i$ 번 행을 계산하기 위해  $i - 1$ 번 행만 필요하기 때문.

## 방법 2

- 아래 사실 이용 가능

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



## 2절 플로이드-워셜 최단경로 알고리즘

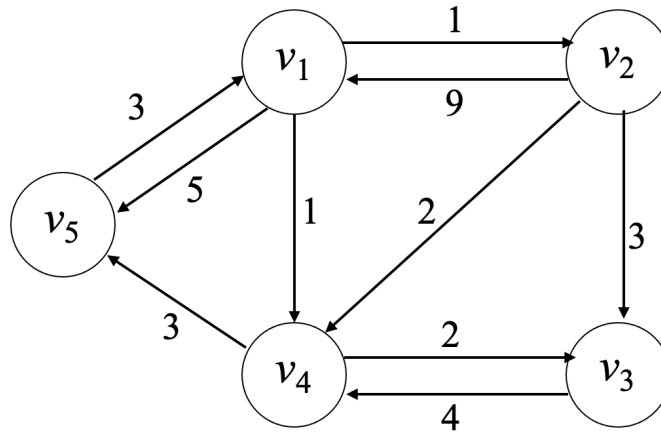


## 그래프 용어

- 마디 또는 정점(vertex, node)
- 이음선(edge, arc)
- 방향 그래프(directed graph, or digraph): 이음선에 방향이 포함된 그래프
- 가중치(weight)
- 가중치 포함 그래프(weighted graph)

- 경로(path): 이음선으로 연결된 마디들의 나열. 즉, 하나의 마디에서 다른 마디로 가는 이음선의 연결.
- 단순경로(simple path): 같은 마디를 두 번 지나지 않는 경로
- 순환(cycle): 하나의 마디에서 출발하여 다시 그 마디로 돌아오는 경로
- 순환 그래프(cyclic graph): 순환을 갖는 그래프
- 비순환 그래프 (acyclic graph): 순환을 갖지 않는 그래프
- 경로의 길이(length):
  - 가중치 포함 그래프의 경우: 경로 상에 있는 가중치의 합
  - 가중치 없는 그래프의 경우: 경로 상에 있는 이음선의 수

## 예제: 가중치 포함 방향그래프



## 최단경로 문제

- 임의의 하나의 마디에서 다른 임의의 마디로 가는 최단 경로 구하기
- 가중치 포함, 방향성 존중.
- 주의사항: 최단경로는 순환을 포함하지 않아야 함. 즉, 단순경로만 대상으로 삼아도 됨.

## 예제

- 위 그래프에서  $v_1$  에서  $v_3$  로 가는 단순경로와 경로 길이:
  - $[v_1, v_2, v_3]$ 
    - 경로 길이:  $1 + 3 = 4$
  - $[v_1, v_4, v_3]$ 
    - 경로 길이:  $1 + 2 = 3$
  - $[v_1, v_2, v_4, v_3]$ 
    - 경로 길이:  $1 + 2 + 2 = 5$
- 따라서 최단경로와 길이는 다음과 같음.
  - $[v_1, v_4, v_3]$ 
    - 경로 길이:  $1 + 2 = 3$

## 응용 사례

- 도시 간의 최단경로
- 다구간 비행기표 여정
- 지도앱에서 경유 추가

## 최적화 문제

- 하나 이상의 해답 중에서 최적의 값을 갖는 해답을 찾아야 하는 문제
- 최적값: 문제에 따라 최댓값 또는 최솟값을 가리킴.
- 예제: 최단경로 찾기 문제.
  - 최소 경로길이를 갖는 해답을 찾아야 함.
  - 하나의 마디에서 다른 마디로의 최단경로가 여러 개 있을 수 있음.
  - 그럴 때는 그 중에 하나 선택.



## 최단경로 문제 무작정 알고리즘

- 하나의 마디에서 다른 마디로의 모든 경로의 길이를 계산한 후 그 중에 최소길이 선택.
- 지수보다 나쁜 시간복잡도를 가짐.

## 무작정 알고리즘 분석

- 가정:
  - $n$  개의 마디:  $u_1, u_2, \dots, u_n$
  - 모든 마디들 사이에 이음선 존재

- $v_1$ 에서 어떤 마디  $v_n$ 으로 가는 경로 중 나머지 모든 마디를 한 번씩 꼭 거쳐서 가는 경로들의 수는?
  - $v_1$ 에서 출발하여 처음에 도착할 수 있는 마디의 가지 수는  $(n - 2)$  개
  - 그 중에 하나를 선택하면, 그 다음에 도착할 수 있는 마디의 가지 수는  $(n - 3)$ 개
  - ...
  - 따라서 총 경로의 개수는 다음과 같음:

$$(n - 2) \times (n - 3) \times \cdots \times 1 = (n - 2)!$$

- 이 경로의 수만 보아도 지수보다 훨씬 큼. 따라서 실용성이 전혀 없음.

## 최단경로 알고리즘 동적계획법 설계 전략

## 그래프의 인접행렬

- 마디와 마디를 잇는 이음선과 가중치의 정보를 표현하는 2차원 행렬
- 다음과 같이 정의되는  $n \times n$  행렬  $W$ 로 표현할 수 있음.

$$W[i][j] = \begin{cases} \text{이음선 가중치} & v_i \text{ 에서 } v_j \text{ 로의 이음선이 존재하는 경우} \\ \infty & v_i \text{ 에서 } v_j \text{ 로의 이음선이 존재하지 않는 경우} \\ 0 & i = j \text{ 인 경우} \end{cases}$$

- 예제: 위 예제 그래프의 인접행렬


$W[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	$\infty$	1	5
2	9	0	3	2	$\infty$
3	$\infty$	$\infty$	0	4	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	2	0	3
5	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

## 최단경로길이 행렬

- 각 마디들 사이의 최단경로의 길이를 담은 2차원 행렬  $D$
- 예제: 위 예제 그래프의 최단경로 길이 행렬

$D[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	3	1	4
2	8	0	3	2	5
3	10	11	0	4	7
4	6	7	2	0	3
5	3	4	6	4	0

### 최단경로 길이행렬 구하기

$W[i][j]$	1	2	3	4	5		$D[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	$\infty$	1	5		1	0	1	3	1	4
2	9	0	3	2	$\infty$		2	8	0	3	2	5
3	$\infty$	$\infty$	0	4	$\infty$		3	10	11	0	4	7
4	$\infty$	$\infty$	2	0	3		4	6	7	2	0	3
5	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0		5	3	4	6	4	0



## 동적계획법 전략

- 작은 입력사례 살펴보기
- $0 \leq k \leq n$  를 만족하는  $k$ 에 대해 다음을 만족하는 2차원 행렬  $D^{(k)}$  생성하기

$D^{(k)}[i][j] =$  집합  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  에 속하는 마디만을 통해서  $v_i$  에서  $v_j$  로 가는 최단경로의 길이

- 다음이 성립함.

$$D^{(0)} = W$$

$$D^{(n)} = D$$

- 남은 과제:  $D^{(k-1)}$  로부터  $D^{(k)}$  생성하기.

$$D^{(0)} \longrightarrow D^{(1)} \longrightarrow D^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow D^{(n-1)} \longrightarrow D^{(n)}$$

## 예제

- 위 예제 그래프에 대해  $D^{(k)}[2][5]$  계산하기
- $D^{(0)}[2][5] = W[2][5] = \infty$
- $D^{(1)}[2][5] = \min(D^{(0)}[2][5], \text{length}[v_2, v_1, v_5]) = \min(\infty, 14) = 14$
- $D^{(2)}[2][5] = D^{(1)}[2][5] = 14$
- $D^{(3)}[2][5] = D^{(2)}[2][5] = 14$

- $D^{(4)}[2][5] = \min(D^{(3)}[2][5], d^{(4)}) = \min(14, 5) = 5$

$$\begin{aligned}d^{(4)} &= \min(\text{length}[v_2, v_4, v_5], \text{length}[v_2, v_1, v_4, v_5], \text{length}[v_2, v_3, v_4, v_5]) \\ &= \min(5, 13, 10) \\ &= 5\end{aligned}$$

- $D^{(5)}[2][5] = D^{(4)}[2][5] = 5$

$D^{(k)}$  의 재귀적 성질

- $D^{(k)}[i][j]$  를 재귀적으로 정의할 수 있음.

$$D^{(k)}[i][j] = \min \left( D^{(k-1)}[i][j], D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j] \right)$$

- 경우 1:  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  에 속한 마디들만을 통해서  $v_i$ 에서  $v_j$ 로 가는 최단경로가  $v_k$ 를 거쳐 가지 않는 경우.

$$D^{(k)}[i][j] = D^{(k-1)}[i][j]$$

- 예제:  $D^{(5)}[1][3] = D^{(4)}[1][3] = 3$

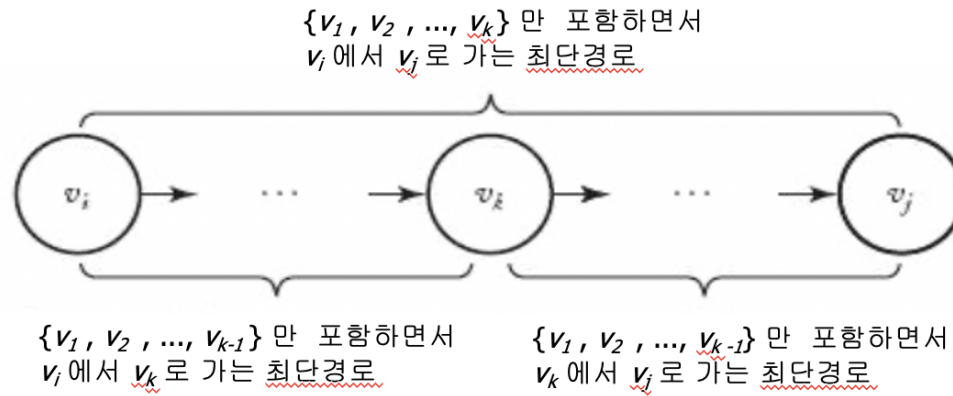


- 경우 2:  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  에 속한 마디들만을 통해서  $v_i$ 에서  $v_j$ 로 가는 최단경로가  $v_k$ 를 거쳐 가는 경우.

$$D^{(k)}[i][j] = D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j]$$

- 예제:  $D^{(2)}[5][3] = 7 = 4 + 3 = D^{(1)}[5][2] + D^{(1)}[2][3]$

- 이유: 아래 그림 참조



## 플로이드-워셜 알고리즘

- 아래 화살표 과정을 구현하는 알고리즘.
- 앞서 설명한 재귀적 성질 이용

$$W = D^{(0)} \longrightarrow D^{(1)} \longrightarrow D^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow D^{(n-1)} \longrightarrow D^{(n)} = D$$

- 입력: 마디 수가  $n$ 인 가중치포함 그래프. 2차원 인접행렬로 표현됨.
- 출력: 하나의 마디에서 다른 마디로 가는 최단경로의 길이를 담은 2차원 행렬.

```
In [6]: from copy import deepcopy

def floyd_warshall(W):
    n = len(W)

    #  $D^{(0)}$  지정
    # 주의: deepcopy를 사용하지 않으면 w에 혼란을 발생시킴
    D = deepcopy(W)

    # k가 0부터 (n-1)까지 이동하면서 D가  $D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ 을 차례대로 모방함.
    # 즉, D를 업데이트하는 방식을 이용하여 최종적으로  $D^{(n)}$  생성
    for k in range(0, n):
        # 행렬의 인덱스는 0부터 (n-1)까지 이동
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, n):
                D[i][j] = min(D[i][j] , D[i][k]+ D[k][j])

    # 최종 완성된 D 반환
    return D
```

## 예제

- 위 예제 그래프의 인접행렬은 다음과 같음.

```
In [7]: # 무한에 해당하는 기호 사용
        from math import inf

        # inf 는 두 마디 사이에 이음선이 없음을 의미함.
        W = [[0, 1, inf, 1, 5],
              [9, 0, 3, 2, inf],
              [inf, inf, 0, 4, inf],
              [inf, inf, 2, 0, 3],
              [3, inf, inf, inf, 0]]
```

- 플로이드-워셜 알고리즘의 결과: 앞서 살펴 본 행렬  $D$ 와 동일.

```
In [8]: floyd_warshall(W)
```

```
Out[8]: [[0, 1, 3, 1, 4],  
         [8, 0, 3, 2, 5],  
         [10, 11, 0, 4, 7],  
         [6, 7, 2, 0, 3],  
         [3, 4, 6, 4, 0]]
```





## 최단경로 확인 알고리즘

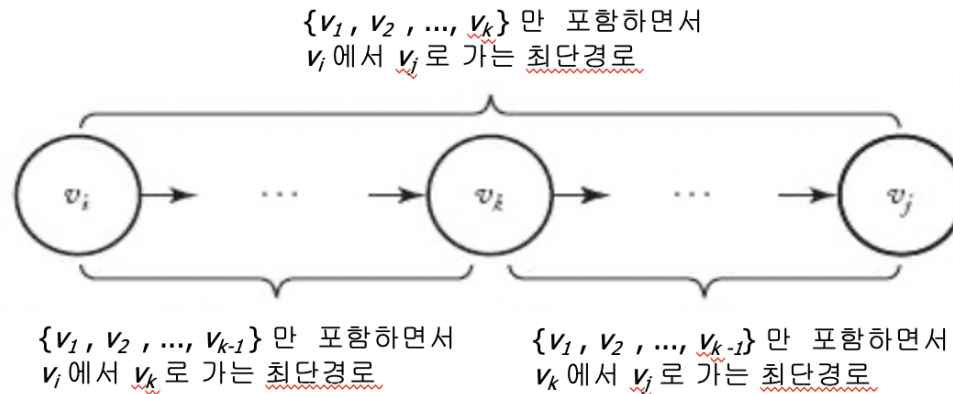
- 이전 함수를 약간 수정하여 최단경로를 출력하는 함수 구현

## 추가사항

- 두 마디 사이의 최단경로에 사용된 마디 중에서 가장 큰 인덱스를 기억하는 행렬  $P$

- 즉, 다음이 성립해야 함.

$$P[i][j] = \begin{cases} k & \text{최단경로의 중간에 사용된 마디의 인덱스 중에서 가장 큰 값이 } k \text{인 경우} \\ & \text{(아래 그림에서 사용된 } v_k \text{의 인덱스 } k) \\ 0 & \text{최단경로의 중간에 사용된 마디가 없는 경우} \end{cases}$$



- 나머지 사항은 동일함.

```
In [9]: from copy import deepcopy

def floyd_warshall2(W):
    n = len(W)

    # deepcopy를 사용하지 않으면 D에 혼란을 발생시킴
    D = deepcopy(W)
    P = deepcopy(W)

    # P 행렬 초기화. 모든 항목을 -1로 설정
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            P[i][j] = -1

    # k가 0부터 (n-1)까지 이동하면서 D가  $D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$ 을 차례대로 모방함.
    # 그와 함께 동시에 P 행렬도 차례대로 업데이트함.
    for k in range(0, n):
        for i in range(0, n):
            for j in range(0, n):
                if D[i][k] + D[k][j] < D[i][j]:
                    P[i][j] = k
                    D[i][j] = D[i][k] + D[k][j]

    # 최종 완성된 P도 반환
    return D, P
```

## 최단경로 찍어보기: 방식 1

- 지정된 두 마디 사이의 최단경로 찍어보기
- 아래 path 함수는 두 마디 사이의 최단 경로상에 위치한 마디를 순서대로 보여줌.

```
In [10]: def path(P, q, r):  
          # 인덱스가 0부터 출발하기에 -1 또는 +1을 적절히 조절해야 함.  
          if P[q-1][r-1] != -1:  
              v = P[q-1][r-1]  
  
              path(P, q, v+1)  
              print(v+1, end=' ')  
              path(P, v+1, r)
```

### 예제: $v_5$ 에서 $v_3$ 으로 가는 최단경로상의 중간마디 확인

- $v_1$ 과  $v_4$ 를 지나간다는 사실을 다음과 같이 확인해줌.

```
In [11]: _, P = floyd_warshall2(W)
```

```
In [12]: P
```

```
Out[12]: [[-1, -1, 3, -1, 3],  
          [4, -1, -1, -1, 3],  
          [4, 4, -1, -1, 3],  
          [4, 4, -1, -1, -1],  
          [-1, 0, 3, 0, -1]]
```

```
In [13]: path(P, 5, 3)
```

```
1 4
```



## 최단경로 찍어보기: 방식 2

- 최단경로 상에 위치한 마디를 리스트로 담을 수 있음.



```
In [14]: def path2(P, q, r, route):  
          # 인덱스가 0부터 출발하기에 -1 또는 +1을 적절히 조절해야 함.  
          if P[q-1][r-1] != -1:  
              v = P[q-1][r-1]  
  
              path2(P, q, v+1, route)  
              route.append(v+1)  
              path2(P, v+1, r, route)  
  
          return route
```

```
In [15]: path2(P, 5, 3, [])
```

```
Out[15]: [1, 4]
```



- 위 결과를 이용하여 경로를 보다 예쁘게 출력할 수 있음.

```
In [16]: def print_path2(P, i, j):  
         route = path2(P, i, j, [])  
         route.insert(0, i)  
         route.append(j)  
         print(" -> ".join([str(v) for v in route]))
```

```
In [17]: print_path2(P, 5, 3)
```

```
5 -> 1 -> 4 -> 3
```

```
In [18]: print_path2(P, 2, 5)
```

```
2 -> 4 -> 5
```

### 최단경로 찍어보기: 방식 3

$$P[i][j] = \begin{cases} k & \text{최단경로상의 마디 중에서 } v_i \text{에 가장 가까운 마디의 인덱스가 } k \text{인 경우} \\ 0 & \text{최단경로의 중간에 사용된 마디가 없는 경우} \end{cases}$$

```
In [19]: from itertools import product

def floyd_warshall3(W):
    n = len(W)

    D = deepcopy(W)
    P = [[0] * n for i in range(n)]

    for i, j in product(range(n), repeat=2):
        if 0 < W[i][j] < inf:
            P[i][j] = j

    for k, i, j in product(range(n), repeat=3):
        sum_ik_kj = D[i][k] + D[k][j]
        if D[i][j] > sum_ik_kj:
            D[i][j] = sum_ik_kj
            P[i][j] = P[i][k]

    return D, P
```

```
In [20]: def path3(D, P, i, j):
          # 인덱스가 0부터 출발하기에 -1 또는 +1을 적절히 조절해야 함.
          path = [i-1]
          while path[-1] != j-1:
              path.append(P[path[-1]][j-1])
          route = ' → '.join(str(p + 1) for p in path)
          print(f"최단길이: {D[i-1][j-1]:>2}, 최단경로: {route}")
```

```
In [21]: D, P = floyd_warshall3(W)
```

```
In [22]: path3(D, P, 5, 3)
```

최단길이: 6, 최단경로: 5 → 1 → 4 → 3

```
In [23]: path3(D, P, 2, 5)
```

최단길이: 5, 최단경로: 2 → 4 → 5

## 3절 동적계획법과 최적화 문제

## 동적계획법에 의한 설계 절차

- 문제의 입력에 대해 최적의 해답을 제공하는 재귀 관계식 설정
- 상향식으로 최적의 해답을 계산
- 상향식으로 최적의 해답을 구축

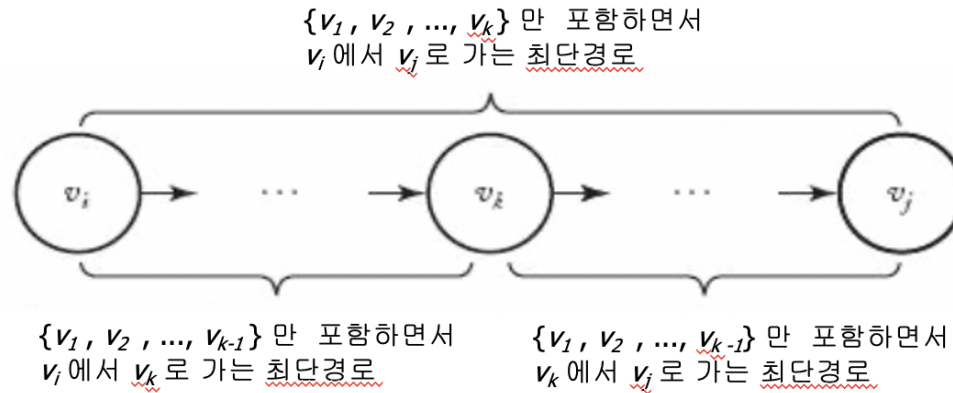


## 최적의 원칙

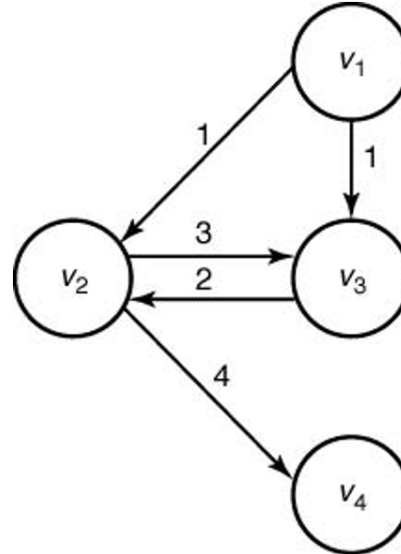
- 어떤 문제의 입력사례에 대한 최적의 해가 그 입력사례를 분할한 모든 부분사례에 대한 최적의 해를 포함하고 있으면, 그 문제는 **최적의 원칙이 적용된다** 라고 말함.
- 최적의 원칙이 적용되는 문제는 동적계획법으로 해결할 수 있음.

## 예제: 최단경로 문제

- $v_k$ 를  $v_i$ 에서  $v_j$ 로 가는 최적경로 상의 마디라고 하면,  $v_i$ 에서  $v_k$ 로 가는 부분경로와  $v_k$ 에서  $v_j$ 로 가는 부분경로도 반드시 최적이어야 함.



## 최적의 원칙이 적용되지 않는 예제



- $v_1$ 에서  $v_4$ 로의 (순환이 없는) 최장경로는  $[v_1, v_3, v_2, v_4]$ 가 된다.
- 그러나 이 경로의 부분 경로인  $v_1$ 에서  $v_3$ 으로의 (순환이 없는) 최장경로는  $[v_1, v_3]$ 이 아니고,  $[v_1, v_2, v_3]$ 이다.
- 따라서 최적의 원칙이 적용되지 않는다.