2장 분할정복

주요 내용

1편

- 1절 이분검색
- 2절 합병정렬
- 3절 분할정복 설계방법

2편

- 4절 퀵정렬(분할교환정렬)
- 5절 슈트라쎈의 행렬곱셈 알고리즘
- 8절 분할정복법을 사용할 수 없는 경우

1절 이분검색

- 분할정복은 재귀 알고리즘으로 쉽게 구현 가능

재귀 예제: 이분검색

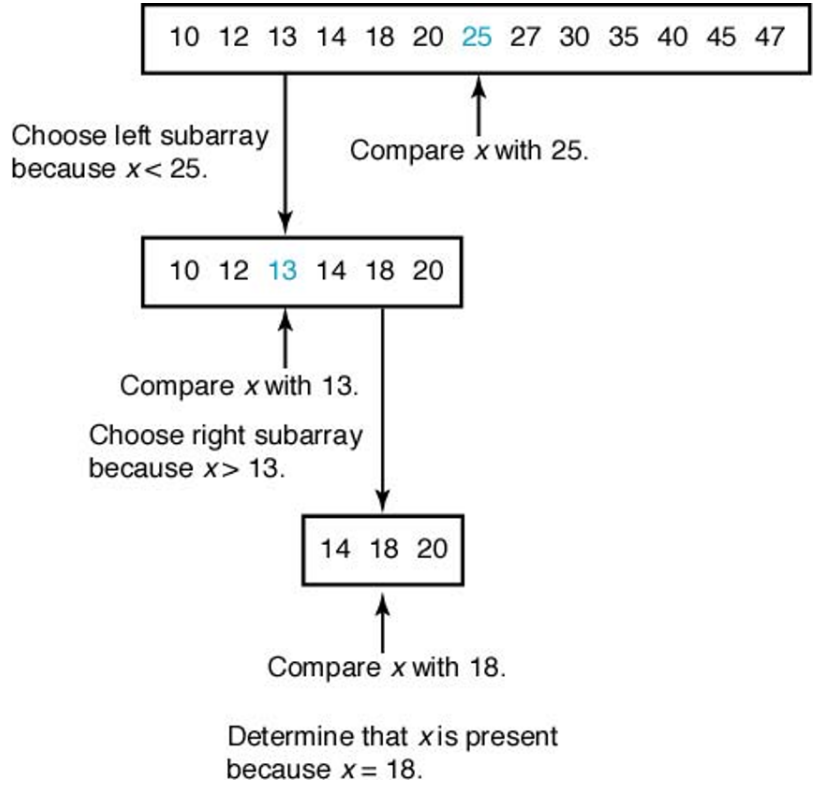
- 문제: 항목이 **비내림차순(오름차순)으로 정렬된 리스트** S에 x가 항목으로 포함되어 있는가?
- 입력 파라미터: 리스트 S와 값 x
- 리턴값:
    - x가 S의 항목일 경우: x의 위치 인덱스
    - 항목이 아닐 경우 -1.

복습: while 반복문을 활용한 이분검색

In [1]:
```
# 이분검색 알고리즘

def binsearch(S, x):
    low, high = 0, len(S)-1
    location = -1

    # while 반복문 실행횟수 확인용
    loop_count = 0

    while low <= high and location == -1:
        loop_count += 1
        mid = (low + high)//2

        if x == S[mid]:
            location = mid
        elif x < S[mid]:
            high = mid - 1
        else:
            low = mid + 1

    return (location, loop_count)
```

설계 전략

1. x가 배열의 중앙에 위치하고 있는 항목과 같으면 해당 항목 인덱스 리턴.
2. 그렇지 않으면 아래 실행
    - 분할: 배열을 중앙에 위치한 항목을 기준으로 반으로 분할
        - x가 중앙에 위치한 항목보다 작으면 왼쪽 배열 반쪽 선택
        - 그렇지 않으면 오른쪽 배열 반쪽을 선택
    - 정복: 선택된 반쪽 배열을 대상으로 1번 단계부터 다시 시작
3. 취합: 불필요!


10 12 13 14 18 20 25 27 30 35 40 45 47
Choose left subarray because x < 25.
Compare x with 25.
10 12 13 14 18 20
Compare x with 13.
Choose right subarray because x > 13.
14 18 20
Compare x with 18.
Determine that x is present because x = 18.

재귀 이해

- "정복: 선택된 반쪽 배열을 대상으로 1번 단계부터 다시 시작" 이라는 표현이 **재귀**를 의미함.
- 분할정복으로 재귀 알고리즘을 개발할 때 아래 사항을 고려해야 함.
    - 분할한 작은 입력사례의 답으로부터 전체 입력사례에 대한 답을 구하는 방법 고안
    - 더 이상 분할이 불가능한 입력사례에 대한 판단할 종료조건 정하기
    - 종료조건을 만족하는 경우 답을 구하는 방법 정하기

파이썬 구현: 이분검색 재귀

In [2]:
```
# 이분검색 재귀

def location(S,x, low, high):
    if low > high:
        return -1

    mid = (low + high)//2
    if x == S[mid]:
        return mid
    elif x < S[mid]:
        return location(S, x, low, mid-1)
    else:
        return location(S, x, mid+1, high)
```

In [3]:
```
sec = [10, 12, 13, 14, 18, 20, 25, 27, 30, 35, 40, 45, 47]
x = 18

print(location(sec, x, 0, len(sec)-1))
```

```
4
```

주의사항

- 책 설명과는 달리 `location` 함수의 인자로 `s`와 `x`를 추가하였음.
- 이유: `location` 함수를 임의의 리스트와 임의의 값에 대해 사용하기 위해서.
- 책에서 `s`와 `x`를 인자로 사용하지 않은 이유:
    - `location` 함수를 재귀로 호출할 때마다 `s`와 `x`의 값이 매번 새롭게 할당되어 메모리가 많이 사용됨.
- 하지만 파이썬의 경우 기존의 리스트를 가리키는 변수를 재활용 함.

- 참조: PythonTutor: 이분검색 재귀 (http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%2
1%0A%0A%20%20%20%20mid%20%3D%20%28low%20%2B%20high%29//2%0A%
1%29%0A%20%20%20%20else%3A%0A%20%20%20%20%20%20%20%20return%
1%29%29&cumulative=false&curInstr=0&heapPrimitives=nevernest&mode=displa

최악 시간복잡도 분석: 이분검색 재귀

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: `x`와 `S[mid]` 비교

$n = 2^k$인 경우

- 아래 점화식 성립

$$W(n) = W\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \quad \text{if } n > 1$$
$$W(1) = 1$$

- 위 점화식에 대한 해답:

$$W(n) = \lg n + 1$$

- 점화식 해답 설명

$$
\begin{aligned}
W(1) &= 1 \\
W(2) &= W(1) + 1 = 2 \\
W(2^2) &= W(2) + 1 = 3 \\
W(2^3) &= W(2^2) + 1 = 4 \\
&\cdots \\
W(2^k) &= W(2^{k-1}) + 1 = k + 1 = \lg(2^k) + 1
\end{aligned}
$$

일반적인 경우

- 아래 최악 시간복잡도 성립

$$W(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \in \Theta(\lg n)$$

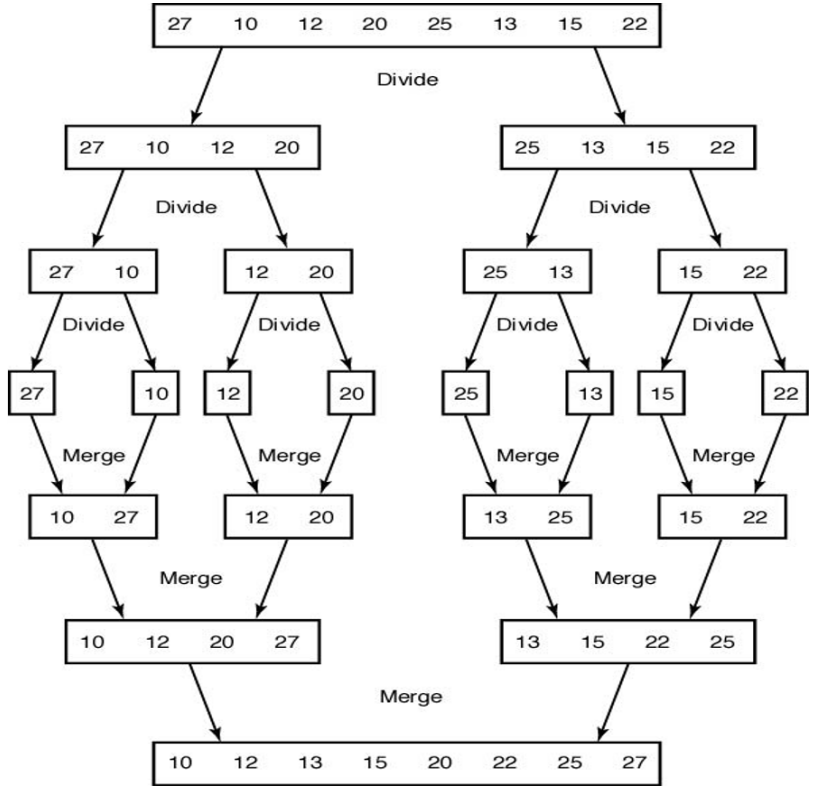
- 증명: 생략

2절 합병정렬

- 문제: 리스트의 항목을 비내림차순(오름차순)으로 정렬하기
- 입력 파라미터: 리스트 S
- 리턴값: S의 모든 항목을 크기순으로 포함한 리스트

설계 전략

1. 분할: 배열을 반으로 분할
2. 정복: 분할된 왼쪽/오른쪽 배열을 대상으로 다음 실행
    - 배열의 크기가 2 이상이면 1번 분할 단계로 이동
    - 두 배열의 크기가 1이면 3번 통합 단계로 이동
3. 통합: 정렬된 두 배열을 합병정렬 후 아직 정복되지 않은 배열이 남아 있는 경우 2번 정복 단계로 이동


27 10 12 20 25 13 15 22
Divide
27 10 12 20
25 13 15 22
Divide
Divide
27 10
12 20
25 13
15 22
Divide
Divide
Divide
Divide
27
10
12
20
25
13
15
22
Merge
Merge
Merge
Merge
10 27
12 20
13 25
15 22
Merge
Merge
10 12 20 27
13 15 22 25
Merge
10 12 13 15 20 22 25 27

파이썬 구현: 합병정렬 재귀

정렬된 두 리스트를 정렬된 리스트로 합병하기

- 입력값: 정렬된 두 리스트
- 리턴값: 두 리스트의 항목을 비내림차순으로 정렬한 리스트

예제: 작동법 설명

비교횟수	left	right	합병결과
1	**10** 12 20 27	**13** 15 22 25	10
2	10 **12** 20 27	**13** 15 22 25	10 12
3	10 12 **20** 27	**13** 15 22 25	10 12 13
4	10 12 **20** 27	13 **15** 22 25	10 12 13 15
5	10 12 **20** 27	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20
6	10 12 20 **27**	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20 22
7	10 12 20 **27**	13 15 22 **25**	10 12 13 15 20 22 25
	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22 25 27

In [4]:

```python
# 정렬된 두 리스트를 정렬된 리스트로 합병하기

def merge(lList, rList):
    mergedList =[]

    while len(lList)>0 and len(rList)>0:
        if lList[0] < rList[0]:
            mergedList.append(lList.pop(0))
        else:
            mergedList.append(rList.pop(0))

    mergedList.extend(lList)
    mergedList.extend(rList)

    return mergedList
```

In [5]:
```
a = [10, 12, 20, 27]
b = [13, 15, 22, 25]
merge(a, b)
```

Out[5]:
```
[10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

In [6]:
```
# 합병정렬 재귀

def mergesort(aList):
    if len(aList) <= 1:
        return aList

    mid = len(aList) // 2

    lList = mergesort(aList[:mid])
    rList = mergesort(aList[mid:])

    return merge(lList, rList)
```

In [7]:
```
aList = [27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22]

mergesort(aList)
```

Out[7]:
```
[10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

- 참조: PythonTutor: 합병정렬 재귀 (http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20%EC%A0%95%EB%A0%AC%E frontend.js&py=3&rawInputLstJSON=%5B%5D&textReferences=false)

최악 시간복잡도 분석: 합병(merge) 알고리즘

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: 비교연산

최악의 경우 예제:

- 오른쪽 리스트의 마지막 원소를 제외한 나머지를 먼저 옮긴다.
- 왼쪽 리스트의 모든 원소를 옮긴다.
- 오른쪽 마지막 원소를 옮긴다.

In [8]:

```
def merge_count(lList, rList):
    mergedList =[]
    count = 0

    while len(lList)>0 and len(rList)>0:
        count += 1
        if lList[0] < rList[0]:
            mergedList.append(lList.pop(0))
        else:
            mergedList.append(rList.pop(0))

    mergedList.extend(lList)
    mergedList.extend(rList)

    print(f"count: {count}")

    return mergedList
```

In [9]:
```
a1 = [18, 20, 23, 26]
b1 = [13, 15, 17, 27]
merge_count(a1, b1)
```

```
count: 7
```

Out[9]:
```
[13, 15, 17, 18, 20, 23, 26, 27]
```

최선의 경우 예제:

- 왼쪽 리스트 모든 항목이 오른쪽 리스트의 항목보다 작은 경우

In [10]:
```
a = [10, 12, 16, 18]
b = [19, 20, 22, 27]
merge_count(a, b)
```

```
count: 4
```

Out[10]:
```
[10, 12, 16, 18, 19, 20, 22, 27]
```

최악 시간복잡도 분석: 합병정렬(mergesort) 알고리즘

- 입력크기: 리스트 길이
- 단위연산: `merge` 함수에서 발생하는 비교연산

$n = 2^k$ 인 경우

- 아래 점화식 성립: $n > 1$ 인 경우

$$\begin{aligned} W(n) &= W\left(\frac{n}{2}\right) + W\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1) \\ &= 2\,W\left(\frac{n}{2}\right) + (n-1) \end{aligned}$$

- 종료 조건:

  $W(1) = 0$

- 위 점화식에 대한 해답:

$$W(n) = n \lg n - (n-1) \in \Theta(n \lg n)$$

- 증명: 생략

일반적인 경우

- 아래 점화식 성립:

$$W(n) = W\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + W\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n-1)$$

- 따라서 다음 최악 시간복잡도 성립

$$W(n) \in \Theta(n \lg n)$$

- 증명: 생략

제자리 합병정렬

- 앞서 살펴본 `mergesort()` 함수는 호출될 때마다 매번 `aList` 인자에 대한 메모리를 새롭게 사용.

- 이유: 파이썬 리스트의 슬라이싱을 사용하기 때문

```
lList = mergesort(aList[:mid])
  rList = mergesort(aList[mid:])
```

- 재귀 함수를 호출할 때 추가 메모리를 사용하지 않는 방법
    - `low`와 `high`를 추가 인자로 사용하여 주어진 리스트에서 살펴볼 구간을 가리키도록 함.

- 이런 합병정렬 알고리즘을 **제자리** 합병정렬이라 부름.

In [11]:
```
# 제자리 합병정렬 재귀

def mergesort2(aList, low, high):
    if (low < high):

        mid = (low + high) // 2

        lList = mergesort2(aList, low, mid)
        rList = mergesort2(aList, mid+1, high)

        return merge(lList, rList)
    return aList[low:low+1]
```

In [12]:
```
aList = [27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22]

print(mergesort2(aList, 0, 7))
```

```
[10, 12, 13, 15, 20, 22, 25, 27]
```

- 참조: PythonTutor: 제자리 합병정렬 재귀 (http://pythontutor.com/visualize.html#code=%23%20EC%A0%95%EB%A0%AC%E frontend.js&py=3&rawInputLstJSON=%5B%5D&textReferences=false)

`mergesort` 와 `mergesort2` 공간복잡도

- 두 알고리즘의 시간 복잡도는 동일하지만 공간복잡도는 크게 차이남.

`mergesort`의 추가 메모리 공간복잡도

- `merge`를 재귀호출할 때마다 입력 리스트만큼 메모리 추가 사용
- 따라서 `merge`의 최악 시간복잡도만큼 추가 메모리 사용
- 즉, `mergesort` 알고리즘의 추가 메모리 일정 공간복잡도는 $\Theta(n \lg n)$

`mergesort2`의 추가 메모리 공간 복잡도

- 재귀 호출할 때 추가 메모리를 사용하지 않음.
- 즉, 추가 메모리에 대한 일정 공간복잡도는 상수. 즉, $\Theta(1)$.

`mergesort` 와 `mergesort2`의 실행시간 비교

- 실행시간 거의 차이 없음. 즉, 공간복잡도의 차이가 실행시간에 크게 영향 미치지는 않음.
- `merge` 함수를 실행할 때 드는 비용이 절대적이기 때문.

In [13]:
```
# 시간 측정을 위한 모듈

import time
```

In [14]:
```
bigNum = 1000000
reversedList = list(range(bigNum, 0, -1))

start_time = time.time()
mergesort(reversedList)
end_time = time.time()

duration = end_time - start_time
print(f"걸린시간: {duration:.2f}초")
```

```
걸린시간: 95.59초
```

In [15]:

```
bigNum = 1000000
reversedList = list(range(bigNum, 0, -1))

start_time = time.time()
mergesort2(reversedList, 0, bigNum)
end_time = time.time()

duration = end_time - start_time
print(f"걸린시간: {duration:.2f}초")
```

```
걸린시간: 96.02초
```

3절 분할정복 전략

- 분할(Divide)
    - 입력사례를 여러 개의 보다 작은 입력 사례로 분할한다.

- 정복(Conquer: 해결)
    - 각각의 보다 작은 입력사례에 대한 문제를 해결한다.
    - 입력사례가 충분히 작지 않으면 분할 과정으로 돌아간다.

- (필요한 경우) 취합
    - 보다 작은 입력사례에 대한 해답을 취합하여 원래 문제에 대한 해답을 구한다.